УДК 531.16

[1]*Андрій Володимирович Рудий*
[2]*Денис Володимирович Рудавський (д-р фіз.-мат. наук)*

[1]***Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів, Україна***
[2]***Фізико-механічний інститут НАН України, Львів, Україна***

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РУХУ ГУСЕНИЧНОЇ МАШИНИ НА ОСНОВІ РІВНЯНЬ ГІББСА-АППЕЛЯ

У статті розглянуто криволінійний рух гусеничної машини на площині. На основі рівнянь Гіббса-Аппеля сформульовано математичну модель руху гусеничної машини на площині, як механічної системи із неголономними в'язями. Побудована система диференційних рівнянь руху гусеничної машини у відповідних квазікоординатах, враховує сили зчеплення та опору ґрунту із гусеницями машини як на прямолінійних ділянках так і під час її поворотів. Також враховано кути нахилу площини до горизонту та курсовий кут машини відносно схилу площини. Отримані залежності між визначеними кінематичними параметрами руху гусеничної машини можуть бути ефективно використаними при вдосконаленні її систем трансмісії та керування.

Ключові слова: *гусенична машина; неголономна система; рівняння руху; енергія прискорень; кутове прискорення.*

Вступ

Постановка проблеми та її зв'язок з практичними завданнями. При моделюванні роботи окремих внутрішніх механічних систем ГМ (системи трансмісії, керування та ін.), що рухається по площині, необхідно, спочатку побудувати рівняння руху ГМ як цілої, оскільки параметри її руху задаються відповідними параметрами її внутрішніх підсистем. В залежності від поставлених технічних завдань щодо моделювання руху ГМ можна вирішувати пряму або обернену задачу. Пряма задача полягає у визначенні узагальнених координат машини на площині в залежності від сил та моментів, прикладених до ведучих коліс з боку двигуна та трансмісії. Обернена задача, відповідно, полягає у визначенні прикладених до ведучих коліс сил та моментів, необхідних для забезпечення руху ГМ з заданими параметрами. З метою визначення оптимальних параметрів трансмісії ГМ доцільно розв'язувати обернену задачу, задаючись певними параметрами руху ГМ, що обумовлені характером виконання нею завдань за призначенням.

Аналіз робіт, спрямованих на дослідження руху ГМ показав, що найчастіше для описання руху ГМ на площині використовують відомі рівняння Лагранжа 2-го роду в узагальнених координатах [1, 5, 9, 10]. Проте, такий підхід зручно застосовувати для вирішення прямої задачі, а саме моделювання руху ГМ для визначення таких параметрів як координати положення машини на площині, її курсовий кут, лінійна і кутова швидкості та ін. Разом із тим рівняння Лагранжа другого роду застосовуються лише для випадків голономних механічних систем, що не дозволяє розглядати систему "ГМ - площина" як одну неголономну механічну систему. Тому, у випадку систем із неголономними в'язями, їх необхідно замінювати відповідними силами реакції, що може значно ускладнювати відповідну математичну модель. При розв'язуванні важливих для практичних застосувань обернених задач, часто немає потреби оперувати усіма узагальненими координатами машини на площині, а більш зручним є введення так званих квазікоординат у яких записуються відповідні рівняння Гіббса-Аппеля руху неголономної механічної системи [6].

Тому метою даної роботи є побудова на основі рівнянь Гіббса-Аппеля математичної моделі руху ГМ на площині як неголономної механічної системи.

Виклад основного матеріалу дослідження

Рівняння Гіббса-Аппеля досить широко застосовуються при дослідженні руху неголономних механічних систем у робототехніці, зокрема для опису руху колісних роботів з двома та більше незалежно керованими активними колесами (див. наприклад [3, 8]). За певних припущень можна розглядати ГМ як візок із двома незалежними ведучими колесами (рис.1).

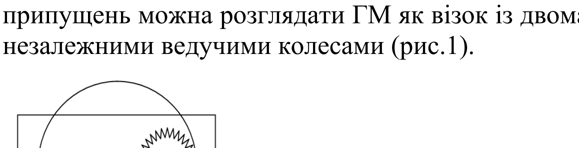

Рис.1 Схематичне представлення ГМ у вигляді візка із двома незалежними ведучими колесами.

Дійсно, гусеничний рушій, натягнутий навколо опорних котків, підтримуючих котків, направляючого та ведучого колеса можна наближено вважати деформованим колесом із контактуючою поверхнею у вигляді гусеничної стрічки (рис. 1). Таке колесо відрізняється від коліс так званого візка Чаплигіна [7] відносно великою площею контакту із площиною, що створюватиме додатковий опір під час повороту.

Розглянемо схему руху ГМ по площині (рис. 2). У випадку повороту ГМ позначимо індексом 1 відстаючу гусеницю, а індексом 2 забігаючу.

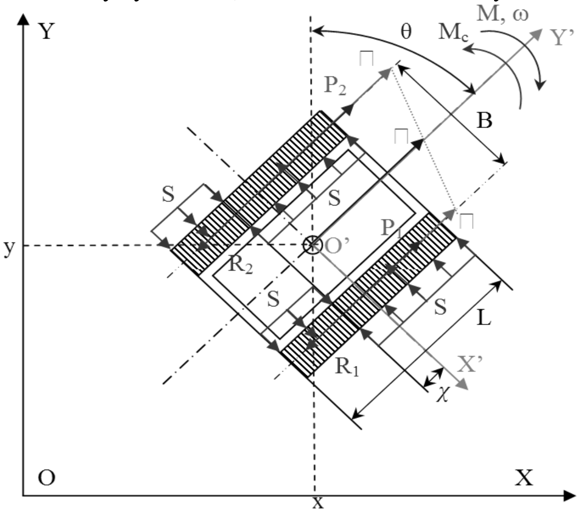

Рис.2 Схема руху гусеничної машини по площині.

Введемо наступні системи координат: xOy – основна система координат, у площині якої відбувається рух машини, x'O'y' – рухома система координат, точка відліку якої співпадає з центром мас машини, вісь x' направлена вздовж повздовжньої осі машини, а вісь y' – вздовж поперечної. При визначенні рівнянь кінематичних в'язей неголономної системи "ГМ-площина" вважали, що через абсолютне тертя гусениці не можуть пробуксовувати відносно опорної площини у точках контакту з нею як у повздовжньому так і у поперечному напрямках. Окрім того гусениці не повинні мати бокового проковзування. Таким чином систему рівнянь кінематичних в'язей можна представити у вигляді (1).

$$\begin{cases} -\dot{x}\sin\theta + y\cos\theta = 0, \\ \dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta + \dfrac{B}{2}\dot{\theta} - R_{вк}\omega_{вк} = 0, \\ \dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta - \dfrac{B}{2}\dot{\theta} - R_{вк}\omega_{вк} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де x, y, – координати центру мас машини,

θ – курсовий кут машини,

$R_{вк}$ – радіус ведучого колеса,

$\omega_{вк}$ – кутова швидкість обертання ведучого колеса.

Однозначно положення такої механічної системи "ГМ-площина" можна задати п'ятьма узагальненими координатами, а саме: x, y, θ, кут провертання лівого – φ_1 та правого – φ_2 ведучих коліс.

Оскільки загальна кількість кінематичних в'язей, накладених на систему "ГМ-площина", рівна трьом, то система має дві ступені вільності, а отже її рух можна задати двома рівняннями.

Для опису параметрів руху ГМ по площині введемо наступні квазікоординати:

$\nu = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ – лінійна швидкість ГМ;

$\omega = \dot{\theta}$ – кутова швидкість ГМ відносно вертикальної осі, що проходить через її центр мас.

У такому випадку загальний вигляд рівнянь Гіббса-Аппеля наступний [4]

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{\nu}} = Q_\nu \; ; \; \frac{\partial S}{\partial \dot{\omega}} = Q_\omega \, , \quad (2)$$

де Q_ν, та Q_ω – узагальнені сили [4], що відповідають введеним квазікординатам системи "ГМ-площина", S – функція енергії прискорень [4], яка в даному випадку набуде виду

$$S = 0{,}5\left[Gg^{-1}\left(\dot{\nu}^2 + (\nu\omega)^2\right) + J_{гм}\left(\dot{\omega}^2 + \omega^4\right)\right], \quad (3)$$

де G – вага машини, $J_{гм}$ – момент інерції ГМ відносно вертикальної осі, що проходить через центр мас машини.

Після диференціювання функції S у рівняннях (2) отримаємо

$$\frac{G\dot{\nu}}{g} = Q_\nu ; \quad J_{гм}\dot{\omega} = Q_\omega \, . \quad (4)$$

Узагальнені сили Q_ν, та Q_ω в нашому випадку можна записати як [4]:

$$Q_\nu = (P_1 + P_2) - (R_1 + R_2),$$
$$Q_\omega = \frac{B(P_2 - P_1)}{2} - \frac{B(R_2 - R_1)}{2} - \operatorname{sign}\omega \cdot M_c , \quad (5)$$

де P_1, P_2 – сили тяги по відстаючому та забігаючому бортах ГМ, R_1, R_2 – сили реакції ґрунту, B – поперечна база машини, M_c – момент сили опору повороту машини при зрізанні ґрунту.

Розглянемо важливий із практичної точки зору випадок руху ГМ на площині, що знаходиться під довільним кутом до горизонту. Такий рух ГМ реалізується на практиці, наприклад під час її повороту на косогорі.

У такому випадку величини зовнішніх сил та моментів реакції ґрунту можна записати як :

$$R_1 = f_п\left(\frac{G\cos\alpha}{2} + \frac{h_{цм}G\sin\alpha\sin\theta}{B}\right),$$
$$R_2 = f_п\left(\frac{G\cos\alpha}{2} - \frac{h_{цм}G\sin\alpha\sin\theta}{B}\right), \quad (6)$$
$$M_c = \frac{\mu G L\cos\alpha}{3B}\left[1 - \left(\frac{tg\alpha\sin\theta}{\mu}\right)\right],$$

де α – кут нахилу площини руху ГМ по відношенню до горизонту, $h_{цм}$ – відстань від центру мас ГМ до площини її руху, $f_п$ – коефіцієнт опору тертя кочення гусениці ГМ по ґрунту, μ – коефіцієнт опору повороту машини на зрізання ґрунту, що визначається за формулою Нікітіна А.О. [10]

$$\mu = \frac{\mu_{max}}{a + (1-a)\left(R_{пов}B^{-1} + 0{,}5\right)} , \quad (7)$$

де $a = 0{,}85$, μ_{max} – коефіцієнт опору повороту, визначений для заданого типу ґрунту.

На основі табличних даних для відповідного типу ґрунту величина $f_п$ може бути представлена у вигляді емпіричної формули Крилова Л.К. [2]

$$f_п = f\left(1 + 15\left(15 + R_{пов}B^{-1}\right)^{-1}\right), \qquad (8)$$

де $R_{пов}$ – радіус повороту гусеничної машини.

Тоді, враховуючи представлення (3)-(8) рівняння руху ГМ (2) запишемо як

$$\begin{cases} \dfrac{G\dot{v}}{g} = \left(P_1 + P_2\right) - f_п G\cos\alpha, \\ J_{гм}\dot{\omega} = \dfrac{B}{2}\left(P_2 - P_1\right) + f_п h_{цм} G\sin\alpha\sin\theta - . \\ -\mathrm{sign}\omega \dfrac{\mu G L\cos\alpha}{3B}\left[1 - \left(\dfrac{tg\alpha\sin\theta}{\mu}\right)\right]. \end{cases} \qquad (9)$$

Розглянемо обернену задачу визначення сил тяги P_1 та P_2, необхідних для здійснення криволінійного руху із заданими лінійним та кутовим прискореннями $\dot{v}$ та $\dot{\omega}$ відповідно. Для цього потрібно розв'язати систему (9) відносно шуканих величин P_1 та P_2. Тому перетворимо для зручності систему (9) у вигляд

$$\begin{cases} \left(P_1 + P_2\right) = \dfrac{G\dot{v}}{g} + f_п G\cos\alpha, \\ \left(P_2 - P_1\right) = \dfrac{2}{B}\begin{bmatrix} J_{гм}\dot{\omega} - f_п h_{цм} G\sin\alpha\sin\theta + \\ +\mathrm{sign}\omega \dfrac{\mu G L\cos\alpha}{3B}\left(1 - \left(\dfrac{tg\alpha\sin\theta}{\mu}\right)\right) \end{bmatrix}. \end{cases} \qquad (10)$$

Далі, шляхом віднімання та додавання рівнянь системи (10) отримаємо шукані вирази для визначення сил тяги P_1 та P_2, необхідних для здійснення руху із заданими кінематичними параметрами $\dot{v}$ та $\dot{\omega}$

$$P_1 = 0{,}5(Q_1 - Q_2), \;\; P_2 = -0{,}5(Q_2 - Q_1),$$

де $Q_1 = \dfrac{G\dot{v}}{g} + f_п G\cos\alpha$,

$$Q_2 = \frac{2}{B}\begin{bmatrix} J_{гм}\dot{\omega} - f_п h_{цм} G\sin\alpha\sin\theta + \\ +\mathrm{sign}\omega \dfrac{\mu G L\cos\alpha}{3B}\left(1 - \left(\dfrac{tg\alpha\sin\theta}{\mu}\right)\right) \end{bmatrix}.$$

А відповідні їм крутні моменти на ведучих колесах визначаються за формулами

$$M_1 = \frac{R_{вк}}{2}(Q_1 - Q_2),$$

$$M_2 = -\frac{R_{вк}}{2}(Q_2 - Q_1)$$

Висновки й перспективи подальших досліджень

В роботі побудовано математичну модель руху ГМ на площині з використанням рівнянь Гіббса-Аппеля;

Сформульована математична модель, незважаючи на свою відносну простоту, не поступається у ефективності математичним моделям на основі рівнянь Лагранжа 2-го роду;

Розроблена математична модель може бути ефективно застосована для вирішення завдань відбору та оптимізації параметрів трансмісії ГМ.

Література

1. Александров Е. Е. Автоматизированное управление гидрообъемными трансмиссиями и механизмами поворота гусеничных машин /Александров Е. Е., Борисюк М. Д., Грита Я. В., Кононенко В. А. – Харьков: ХГПУ,1995. – 176с. **2. Антонов А. С.** Армейские гусеничные машины / Антонов А. С., Запрягаев М. М., Хавханов В. П. – Москва: Воениздат, 1973 – 327 с. **3. Бартенев В. В.,** Яцун С. Ф., Аль-Еззи А. С. Математическая модель движения мобильного робота с двумя независимыми ведущими колесами по горизонтальной плоскости // Известия Самарского научного центра РАН. Механика и машиностроение. - Самара: СамНЦ РАН, 2011. – т.13 - №4. – С.288-293. **4. Бутенин Н. В.** Введение в аналитическую механику /Бутенин Н. В. – Москва: Наука, 1971. – 264 с. **5. Александров Е. Е.** Динамика транспортно-тяговых колесных и гусеничных машин / Александров Е. Е., Волонцевич Д. О., Самородов В. Б., Карпенко В. А., Лебедев А. Т., Перегон В. А., Туренко А. Н. – Харьков: ХНАДУ, 2001. – 640 с. **6. Смолин И. Ю.** Основы аналитической динамики / Смолин И. Ю. – Томск: ТГУ, 2007. – 32 с. **7. Голубев Ю. Ф.** Основы теоретической механики: Учебник. 2-е изд. / Голубев Ю. Ф. – Москва: МГУ, 2000. – 719 с. **8. Охоцимский Д. Е.**, Мартыненко Ю. Г. Новые задачи динамики и управления движением мобильных колесных роботов // Успехи механики – Москва: МГУ, 2003. – С.12-15. **9. Кондаков С. В.** Повышение подвижности быстроходной гусеничной машины путём автоматизации системы управления криволинейным движением / Кондаков С. В. – Челябинск: ЮУрГУ, 2009. – 110 с. **10. Чобиток В. А.** Теория движения танков и БМП. / Чобиток В. А. – Москва: Воениздат, 1984 – 264 с.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ГУСЕНИЧНОЙ МАШИНЫ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ ГИББСА-АППЕЛЯ

[1]***Андрей Владимирович Рудой***
[2]***Денис Владимирович Рудавский*** ***(д-р физ.-мат. наук)***

[1]***Национальная академия сухопутных войск им. гетьмана П.Сагайдачного, Львов, Украина***
[2]***Физико-механический институт НАН Украины, Львов, Украина***

В статье на основе уравнений Гиббса-Аппеля сформулирована математическая модель движения гусеничной машины (ГМ) на плоскости, как механической системы с неголономными связями. Построенная система дифференциальных уравнений движения гусеничной машины в соответствующих *квазикоординатах учитывает силы сцепления и сопротивления грунта с гусеницами машины как на прямолинейных участках, так и во время её поворотов. Полученные зависимости между определёнными кинематическими параметрами движения гусеничной машины могут быть эффективно использованы при усовершенствовании систем трансмиссии и управления.*

Ключевые слова: *гусеничная машина; неголономная система; уравнения движения; энергия ускорений; угловое ускорение.*

THE TRACKED VEHICLE MOTION MATHEMATICAL MODEL BASED ON GIBBS-APPELL EQUATIONS

[1]Andrii V. Rudyi
[2]Denys V. Rudavskyi** **(Doctor of Physical and Mathematical Sciences)

[1]Hetman Petro Sahaidachny National Army Academy, Lviv, Ukraine
[2]Karpenko Physico-mechanical institute of the NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine

This article is dedicated to the study of the curvilinear motion of tracked vehicles on the plane. Based on the Gibbs-Appell equations the mathematical model of the tracked vehicle on the two-dimensional surface has been formulated as a mechanical system with holonomic constrains. The constructed system of differential equations of tracked vehicle motion in corresponding quasi-coordinates takes into account the soil traction and resistance forces at the rectilinear sections, and at its turns. Furthermore, angles to the horizontal plane and the machine course angle relative to the slope of plane were also taken into consideration. Obtained dependences between the defined kinematic parameters of tracked vehicles can be effectively used for improving its transmission and control systems.

Keywords: *tracked vehicle; nonholonomic constraint; motion equation; energy of acceleration; angular acceleration.*

References

1. Aleksandrov E.E., Borysiuk M.D., Hryta Ya.V., Kononenko V.A., (1995), Automated control hydrostatic transmissions and mechanisms rotation of tracked vehicles. [*Avtomatizirovannoe upravlenie gidroob'emnymi transmissijami i mehanizmami povorota gusenichnyh mashin*], Kharkov: KhHPU, 176 p. **2. Antonov A.S.,** Zapriahaev M.M., Khavkhanov V.P. (1973), Army tracked vehicles. [*Armejskie gusenichnye mashiny*], Moscow, Voenizdat, 327 p. **3. Bartenev V.V.**, Jacun S.F., Al'-Ezzi A.S. (2011), A mathematical model of the motion of the mobile robot with two independent driving wheels on a horizontal plane. [*Matematicheskaja model' dvizhenija mobil'nogo robota s dvumja nezavisimymi vedushhimi kolesami po gorizontal'noj ploskosti*], Izvestija Samarskogo nauchnogo centra RAN. Mehanika i mashinostroenie, Samara: SamNC RAN, volume 3, No 4, pp. 288-293. **4. Butenin N.V.** (1971), Introduction to analytical mechanics. [*Vvedenie v analiticheskuju mehaniku*], Moscow, Hayka, 264 p. **5. Aleksandrov E.E.**, Voloncevich D.O., Samorodov V.B., Karpenko V.A., Lebedev A.T., Peregon V.A., Turenko A.N. (2001), The dynamics of transport and traction of wheeled and tracked vehicles. [*Dinamika transportno-tjagovyh kolesnyh i gusenichnyh mashin*], Kharkov: KhNADU, 640 p. **6. Smolin I.Ju.** (2007), Fundamentals of analytical dynamics. [*Osnovy analiticheskoj dinamiki*], Tomsk: TGU, 32 p. **7. Golubev Ju.F.** (2000), Basics of theoretical mechanics textbook. 2nd ed. [*Osnovy teoreticheskoj mehaniki: Uchebnik. 2-e izd.*], Moscow: MGU, 719 p. **8. Ohocimskij D.E., Martynenko Ju.G.** (2003), New problems of dynamics and motion control of mobile wheeled robots. [*Novye zadachi dinamiki i upravlenija dvizheniem mobil'nyh kolesnyh robotov*], Uspehi mehaniki, Moscow: MGU, pp. 12-15. **9. Kondakov S.V.** (2009), Increasing the mobility of high-speed tracked vehicle by the automation control system of curvilinear motion. [*Povyshenie podvizhnosti bystrohodnoj gusenichnoj mashiny putjom avtomatizacii sistemy upravlenija krivolinejnym dvizheniem*], Cheljabinsk: JuUrGU, 110 p. **10. Chobitok V.A. (**1984), Theory of movement of tanks and infantry fighting vehicles. [*Teorija dvizhenija tankov i BMP*], Moscow: Voenizdat, 264 p.

Отримано: 11.10.2015 року