УДК 519.9

[1]*Юрий Кашафович Зиатдинов* (д-р техн. наук, профессор)
[1]*Альберт Николаевич Воронин* (д-р техн. наук, профессор)
[2]*Александр Юрьевич Пермяков* (д-р техн. наук, профессор)
[2]*Игорь Давыдович Варламов* (канд. техн. наук)

[1]*Национальный авиационный университет, Киев, Украина*
[2]*Национальный университет обороны Украины имени Ивана Черняховского, Киев, Украина*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ МАССОВО-ТРАЕКТОРНЫХ ПАРАМЕТРОВ ТРАНСФОРМЕРНОЙ АВИАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

В работе рассматривается задача поиска оптимальных вариантов построения трансформерных авиационных систем. При этом определяются такие массово-траекторные параметры системы, которые с достаточной полнотой и достоверностью характеризуют трансформер, а также одновременно позволяют уменьшить размерность решаемой задачи.

Трансформерность предопределяет характерную противоречивость и связность критериев оптимизации, поэтому отдельно решается задача определения координат критериального пространства, в котором осуществляется экстремизация критериев.

Идея решения задачи парето-оптимального выбора массово-траекторных параметров трансформерных авиационных систем заключается в определении уравнения кривой линии Парето в многомерном пространстве исследуемых массово-траекторных параметров. Далее применив методы матричного анализа и линейной алгебры, формируется парето-оптимальная область вариантов построения трансформерной авиационной системы. Данная методология позволяет в дальнейшем получить из парето-оптимальной области по значению любой одной заданной координаты весь набор координат массово-траекторных параметров системы, а также значения критериальных функций в многомерном критериальном пространстве.

Ключевые слова: *трансформерная авиационная система; многокритериальная оптимизация; критериальная функция; критеральное пространство.*

Введение

По своему функциональному применению, высокому показателю ресурсозатрат как на этапе проектирования, так и на этапе производства трансформерная авиационная система (ТАС) относится к классу сложных систем.

Анализ эффективности ТАС неотделим от анализа затрат ресурсов на достижение определенной ее эффективности. Ни затраты ресурсов, ни эффективность ТАС сами по себе не дают достаточных оснований для ее выбора. Желание иметь самую дешевую ТАС бессмысленно, так как неизвестно, что именно мы хотим получить за наименьшую цену. С другой стороны, недостаточно желать ТАС, способную выполнить поставленную перед нею цель. Существует несколько путей к достижению этой цели, требующих различных затрат ресурсов. Поэтому только с помощью соответствующих критериев, учитывающих и эффективность, и стоимость можно выбрать предпочтительный путь.

Как показывает практика, и это подтверждается анализом многих работ, в идеале право на существование имеет лишь техника, удовлетворяющая в пределах своего жизненного цикла критериям эффективность (E) – стоимость (S) – время (T). Их сущность заключается в том, чтобы “вклад” любого образца в исполнение поставленного на него расчетного задания был не только практически, но и экономически оправдан. Но решая задачи оптимизации связанные с этими критериями исследователи обычно уходят от многокритериальных задач к однокритериальным. То есть оптимизируется один из трех критериев, а остальные два принимаются в качестве ограничений. Выбор того или иного из этих критериев в качестве оптимизируемого в значительной степени зависит от того, что именно может быть задано с большей степенью точности.

Основным показателем экономической эффективности ТАС является S. Но беря во внимание то, что этот показатель учитывает полные затраты, характеризующие полный объем задач, который может быть оценен весьма приближенно, рассматривать его как один целостный показатель, и соответственно применять к нему методы однокритериальной оптимизации нельзя.

В связи с этим построение математической модели поиска оптимальных вариантов построения ТАС представляет собой актуальную научную задачу.

Постановка проблемы. Каждый из компонентов, входящий в состав ТАС, характеризуется значительным количеством параметров $x_1, x_2, ..., x_m$ и сложными связями между ними.

Необходимо найти варианты построения ТАС, экономическая эффективность которых, оптимально удовлетворяла бы конкретному варианту расчетной задачи. Поэтому целесообразно рассмотреть два показателя включающие в себя понятие стоимости: $S_{разр}$ – стоимость разработки ТАС и $S_{рз}$ – стоимость ТАС для решения конкретной расчетной задачи. Рассмотрение именно этих двух показателей позволит в дальнейшем учесть затраты на разработку, изготовление опытных образцов и летные испытания ТАС, а также позволит производить сравнительную оценку экономической эффективности вариантов ТАС включающих полный объем задач (номинальных вариантов) на фоне конкретного объема задач.

Как правило, оба эти критерия могут быть выражены через определенный набор массово-траекторных параметров (МТП). К таким параметрам относятся, например, масса заправляемого топлива, масса полезной нагрузки, тяга двигателей, дальность полета и т.д. Все эти параметры, а также остальные, через которые могут быть выражены критерии $S_{разр}$ и $S_{рз}$ имеются в проектах ТАС, в статистической информации по эксплуатации и применению аналогичных систем или могут быть получены расчетным путем с применением методов экономико-математического моделирования физики процессов создания и применения систем данного класса.

Полный учет всех МТП в критериях $S_{разр}$ и $S_{рз}$ привел бы к неоправданному усложнению критериальных функций и к чрезмерным трудностям решения задач оптимизации. Поэтому естественным является поиск наиболее информативных МТП – координат критериального пространства, в котором будет осуществляться экстремизация введенных критериев. При выборе таких МТП необходимо чтобы все они принадлежали к перечню основных тактико-технических характеристик системы, могли быть выражены в стоимостном эквиваленте и удовлетворяли требованиям.

Выбранные МТП с достаточной полнотой и достоверностью должны характеризовать ТАС, что позволит понизить размерность решаемой задачи, так как большинство определяющих стоимостную математическую модель параметров должны быть однозначно определены через предложенный набор МТП. В этом случае остальные определяющие параметры будут являться либо статистическими коэффициентами, либо задаваться экспертно.

Тогда качество системы может быть оценено по совокупности частных критериев $S_{разр}$ и $S_{рз}$, представляющих собой функции выбранных МТП:

$$S_{разр} \Rightarrow f_1(x_1, x_2, ..., x_m),$$

$$S_{рз} \Rightarrow f_2(x_1, x_2, ..., x_m),$$

где $x_1, x_2, ..., x_m$ – выбранные МТП.

Эти критерии находятся в тесной связи и противоречивости друг с другом.

В случае непротиворечивости этих критериев оптимизироваться будет суммарный критерий $S_{разр} + S_{рз}$, характеризующий полные затраты на разработку и реализацию ТАС. В таком случае (рис. 1) уменьшение $S_{рз}$ приводит к уменьшению $S_{разр}$, и наоборот. Тогда из условия оптимальности следует, что оптимальным будет считаться вариант с минимальными затратами. Но такой вариант построения ТАС будет рассчитан под выполнение конкретной и очень узкой задачи, что в условиях постоянно меняющихся функциональных заданий и требований не будет целесообразным, так как ТАС не будет “гибкой” и многофункциональной. С другой точки зрения разрабатывая более функциональную ТАС будет повышаться соответственно и $S_{рз}$. Такой вариант построения ТАС будет удовлетворять большинству требованиям, но не будет целесообразным с точки зрения экономической эффективности.

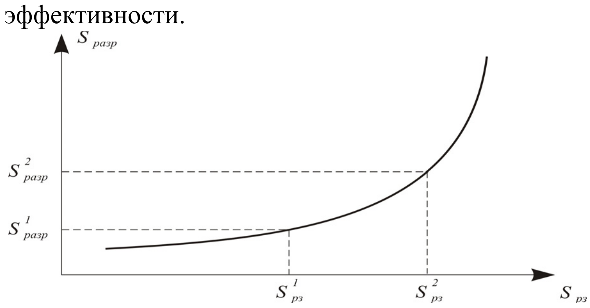

Рис. 1. Зависимость $S_{разр}$ от $S_{рз}$, в случае непротиворечивости

Следует также отметить, что нельзя суммировать критерии $S_{разр}$ и $S_{рз}$ в случае если ТАС разрабатывается под выполнение большого спектра задач, а реализовывается под конкретную задачу, входящую в этот спектр. В данном случае суммирующий критерий не будет объективным, так как в сумму войдут затраты связанные с расчетными задачами которые абсолютно не относятся к той которая реализуется. Критерии $S_{разр}$ и $S_{рз}$ могут суммироваться лишь в том случае, когда ТАС разрабатывается и реализуется только под один спектр расчетных задач, и только в этом случае можно говорить о том, что критерии $S_{разр}$ и $S_{рз}$ непротиворечивы. Во всех остальных случаях $S_{разр}$ и $S_{рз}$ будут противоречивыми.

Противоречивость можно проследить еще и на примере того, что $S_{разр}$ будет уменьшаться со временем и усовершенствованием системы в пределах одного класса. Так как в каждый новый вариант реализации ТАС уже будут включаться данные с предыдущих вариантов, соответственно стоимостные ресурсы тратиться на них не будут. И напротив, $S_{рз}$ будет увеличиваться с усовершенствованием системы. Поэтому оптимизируя систему в пределах этих двух критериев одновременно, невозможно будет уменьшить один, без увеличения другого, и наоборот.

Также в случае противоречивости (рис. 2) наблюдается еще одна ситуация, в которой с уменьшением затрат на разработку, затраты на реализацию $S_{рз}$ будут увеличиваться.

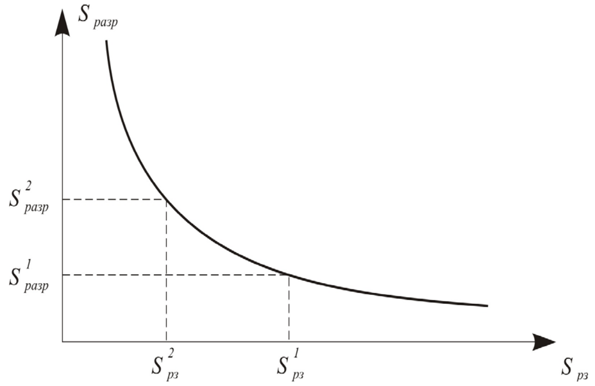

Рис. 2. Зависимость $S_{разр}$ от $S_{рз}$, в случае противоречивости

Это не говорит о том, что спектр решаемых расчетных задач увеличится, затраты увеличатся в связи с дефектами и поломками которые будут возникать при реализации, и для их устранения будут тратиться дополнительные средства. Соответственно при увеличении затрат на разработку $S_{разр}$ многих дефектов во время реализации можно будет избежать, за счет чего снизятся потери $S_{рз}$.

В этом случае можно говорить о более “гибких” и функциональных вариантах построения ТАС. Так как ТАС может разрабатываться и просчитываться под большой спектр решаемых задач, а реализовываться под определенную задачу из этого спектра. В данном случае критерии $S_{разр}$ и $S_{рз}$ нельзя суммировать в силу их противоречивости, а для нахождения оптимального варианта построения ТАС необходимо применять к ним методы многокритериальной оптимизации.

Необходимо также отметить, что все вышеизложенные рекомендации и пояснения о непротиворечивости и противоречивости критериев $S_{разр}$ и $S_{рз}$, а также и графические пояснения к ним относятся и рассматриваются на области оптимальных значений этих критериев.

Таким образом, можно сказать, что имея значения выбранных МТП можно определить генеральную идею создания ТАС, которая может быть выражена через некоторые критерии эффективности, определенные на множестве этих МТП.

Анализ последних исследований и публикаций. Работы, на которые опираются авторы и в которых рассматриваются многокритериальные задачи с противоречивыми частными критериями, представлены фундаментальными трудами [1-5].

При этом определение всех параметров каждого из компонентов, входящий в состав ТАС, при поиске оптимальных вариантов ее построения – практически нереальная задача из-за известного “проклятия размерности” [6].

Не решенной частью общей проблемы, которой посвящается данная работа, представляют собой вопросы формирования области оптимальних вариантов построения ТАС, а также определения значения критериальных функций в многомерном критериальном пространстве.

Кроме того, не решена задача определения всего семейства МТП ТАС по одной координате критерального пространства.

Таким образом, в целом для ТАС необходимо определить область оптимальных ТМП, при этом данная область параметров будет парето-оптимальной.

Цель работы. Решение многокритериальной задачи определения парето-оптимальной области МТП ТАС.

Изложение основного материала исследования

Для построения математической модели поиска оптимальных вариантов построения ТАС, необходимо:

– определить такие МТП системы $x_1, x_2, ..., x_m$, которые бы, с одной стороны, с достаточной полнотой и достоверностью характеризовали ТАС, а с другой, позволяли понизить размерность решаемой задачи;

– учесть возможность использования наиболее простых методов анализа этих параметров;

– учесть возможность нормирования выбранных МТП, то есть сведения их к единой размерности или к безразмерному виду;

– качество системы должно оцениваться по совокупности частных критериев, представляющих собой функции от выбранных МТП $f = f(x_1, x_2, ..., x_m)$;

– задать область существования МТП, для однозначного определения их ограничений;

– обеспечить заданный уровень качества системы и эффективности выполнения решаемых нею задач.

При выборе критериев f(x) необходимо учитывать следующие требования:

– критерий должен учитывать оценку эффективности выполнения возложенных на систему основных задач;

– критерий должен быть чувствителен к анализируемым вариантам системы, в частности к выбранным массово-траекторным параметрам $x_1, x_2, ..., x_m$;

– критерий должен быть достаточно простым и наглядным, иметь явный физический смысл, чтобы не возникало затруднений при физической интерпретации результатов исследования.

При выборе критериев необходимо учесть наличие тесной связи между ними и противоречия друг с другом.

При поиске парето-оптимального множества вариантов построения сложной системы, прежде всего, необходимо четко определится с основными требованиями к этой системе. Так как поиск множества уже подразумевает под собой решение многокритериальной задачи, необходимо четко сформулировать требования к критериальным функциям, их аргументам, а также необходимо учесть все связи между критериями, их физику и природу. Все эти требования должны быть неотъемлемой частью процесса обоснования выбора оптимального варианта построения сложной системы.

Характеризуя с большей степенью систему, в совокупности, выбранные массово-траекторные параметры, по сути, представляют собой координаты точки в многомерном пространстве. Или другими словами любая ТАС может быть формально описана координатами точки в многомерном пространстве массово-траекторных параметров. Уравнение существования выделяет в этом пространстве область технически реализуемых вариантов ТАС, а применение моделей функционирования ТАС и методик оценки их эффективности обеспечивает возможность каждой точке этой области поставить в соответствие численные значения указанных критериев.

Но зная численные значения критериев и массово-траекторных параметров, прежде чем приступать к задаче оптимизации, необходимо решить проблемы единственности, существования и эффективного сходящегося алгоритма поиска локального минимума.

Известно, что проблемы существования и единственности снимаются в том случае, когда критериальная функция относится к классу выпуклых функций. В то же время, разработаны и широко используются в прикладных исследованиях ряд высокоэффективных алгоритмов решения задачи минимизации, в которых целевая функция и допустимое множество решений также являются выпуклыми. Эти обстоятельства послужили доводом в пользу выбора квадратичной аппроксимации критериальной функции, как к классу полиномов второй степени.

Учитывая вышесказанное целевую функцию можно задать в виде квадратичного полинома

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} a_{ij}x_i x_j .$$

Адекватность применения этого полинома обоснована в [7], поэтому останавливаться на этом моменте не будем.

Далее для более простой наглядности и возможности графического интерпретирования критериальных функций будем считать m=2. В этом случае, при m=2, имеем:

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + \\ +2a_2x_2 + a_{00}.$$

Здесь принимается, что $x_0 \equiv 1$, а $a_{ij} = a_{ji}$ так как квадратичный полином всегда можно представить в симметричном виде.

Этот многочлен имеет три типа слагаемых

$$f(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2) + f_1(x_1, x_2) + f_0 ,$$

где $f_2(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$ – квадратичная часть, $f_1(x_1, x_2) = 2a_1x_1 + 2a_2x_2$ – линейная часть, $f_0 = a_{00}$ – свободный член. Квадратичная и линейная часть может быть записана с помощью матричных операций

$$f_2(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$f_1(x_1, x_2) = 2\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

а в общем виде может быть представлена следующим образом:

$$f_2(x_1, x_2, ..., x_m) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_m \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1m} & a_{2m} & ... & a_{mm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_m \end{bmatrix},$$

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_m) = 2\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_m \end{bmatrix},$$

а сам полином в записан в матричном виде

$$f(x) = A_0 + 2A_1x + x^T A_2 x . \qquad (1)$$

Здесь $A_0 = a_{00}$ – свободный член аппроксимирующего полинома, $A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_m \end{bmatrix}$ – вектор аппроксимирующих коэффициентов при первых степенях массово-траекторных параметров, которые не перемножаются между собой,

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}$$ – симметричная квадратная матрица при вторых степенях массово-траекторных параметров, а также при параметрах, которые перемножаются друг на друга, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix}$ – вектор-столбец массово-траекторных параметров, $x^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{bmatrix}$ – транспонированный вектор-столбец x.

Для нахождения коэффициентов a_{ij}, необходимо составить систему из m уравнений. Каждое уравнение включает в себя значения массово-траекторных параметров и соответствующие им значения критериев, которые формируются в результате вычислительных экспериментов и образуют базу данных для поиска и выбора рациональной технической концепции перспективной ТАС.

После составления системы уравнений

$$f_k(x) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} a_{ij} x_i x_j ,$$

где k – количество опытов.

Зная связь между значениями массово-траекторных параметров и критериальной функцией, коэффициенты a_{ij} ищутся любыми известными способами решения систем линейных уравнений, при этом система должна быть определенной. Но для определенности системы $f_k(x)$ открытым остается вопрос о количестве опытов k. Так как число неизвестных коэффициентов a_{ij} в $f_k(x)$ равно

$$N = \frac{m(m+1)}{2} + m + 1 = \frac{(m+1)(m+2)}{2},$$

то очевидно, что для ее определенности необходимо, чтобы $k > N$.

В практике широкое распространение получило задание значимых параметров допустимым диапазоном своего изменения $[x_{min}; x_{max}]$. Поэтому наиболее информативным с точки зрения получения значений критериальных функций является бинарное задание МТП.

В случае m-мерного критериального пространства число возможных сочетаний бинарного способа задания МТП составляет 2^m, причем необходимое условие определенности системы $f_k(x)$

$$2^m \ge \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

начинает выполнятся для $m \ge 4$. В случае $m < 4$ можно добавить третью точку в области задания массово-траекторных параметров, при этом условие определенности

$$3^m \ge \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

выполняется для всех $m \ge 1$.

Для удобства дальнейших рассуждений будем пользоваться матричным видом критериальных функций

$$f_1(x) = A_0^1 + 2A_1^1 x + x^T A_2^1 x,$$
$$f_2(x) = A_0^2 + 2A_1^2 x + x^T A_2^2 x,$$

здесь верхние индексы при матрицах A соответствуют номеру критерия.

Таким образом, решив систему $f_k(x)$ для обоих критериев, и найдя коэффициенты a_{ij}, можно сформировать матрицы A_0, A_1 и A_2 для критериальных функций.

Так как оптимизация многокритериальных задач подразумевает под собой минимизацию (максимизацию) главных критериев. То далее необходимо найти значения безусловных минимумов этих критериев.

Используя правила дифференцирования матричных выражений по скалярному аргументу, имеем

$$\frac{f_1(x)}{dx} = 2A_1^1 + 2x^T A_2^1,$$
$$\frac{f_2(x)}{dx} = 2A_1^2 + 2x^T A_2^2.$$

Приравнивая значения $\frac{f_1(x)}{dx}$ и $\frac{f_2(x)}{dx}$ к нулю, получим значения координат безусловных минимумов для критериальных функций $f_1(x)$ – точка $A\left(\text{opt}\, x_1^1, \text{opt}\, x_2^1\right)$ и соответственно $f_2(x)$ – точка $B\left(\text{opt}\, x_1^2, \text{opt}\, x_2^2\right)$ (рис. 3):

$$2A_1^1 + 2x^T A_2^1 = 0 \Rightarrow \text{opt}\, x^T = -A_1^1 \left(A_2^1\right)^{-1}$$

$$2A_1^2 + 2x^T A_2^2 = 0 \Rightarrow \text{opt}\, x^T = -A_1^2 \left(A_2^2\right)^{-1}$$

$$A\left(\text{opt}\, x_1^1, \text{opt}\, x_2^1\right),$$

$$B\left(\text{opt}\, x_1^2, \text{opt}\, x_2^2\right).$$

Таким образом, можно говорить, что варианты построения ТАС с массово-траекторными параметрами, соответствующим точкам $A\left(\text{opt}\, x_1^1, \text{opt}\, x_2^1\right)$ и $B\left(\text{opt}\, x_1^2, \text{opt}\, x_2^2\right)$ являются оптимальными по критериям $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно, но это лишь в том случае, если данные точки принадлежат области допустимых решений. Если же точки не принадлежат этой области, то необходимо проводить дополнительные исследования, основанные на методе множителей Лагранжа и вводить существенные ограничения.

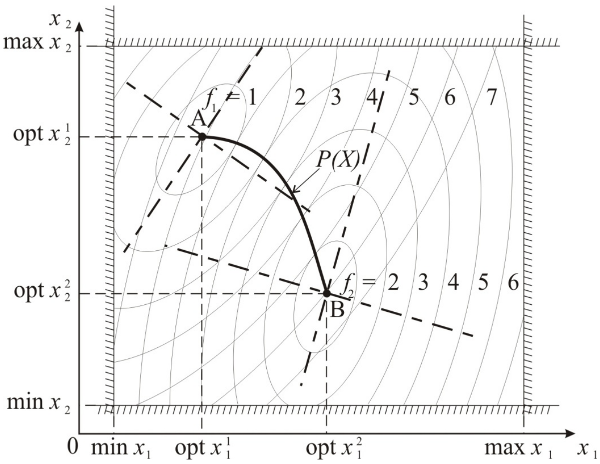

Рис. 3. Семейства исходных эллипсов

Рассмотрим случай, когда критериальные поверхности $f_1(x)$ и $f_2(x)$=const являются многомерными эллипсоидами, а точки A и B принадлежат области допустимых решений (рис. 3).

Можно показать, что при таком подходе множеству парето-оптимальных вариантов ТАС соответствует множество точек пространственной кривой AB, которая является геометрическим местом точек соприкосновения линий второго порядка (изоквант) семейства f_1 с линиями, принадлежащими семейству f_2.

Можно также показать, что парето-оптимальная линия AB полностью расположена внутри области, ограниченной главными осями невырожденных семейств линий второго порядка f_1 и f_2.

Анализировать и сопоставлять компоненты критериев $f_1(x)$ и $f_2(x)$ можно только тогда, когда они имеют одинаковую размерность (нормализованы).

Как видно из рис. 3 для того чтобы привести исходные семейства линий второго порядка f_1 и f_2 к одной размерности, необходимо с критериальными функциями $f_1(x)$ и $f_2(x)$ провести такие ортогональные преобразования, которые позволили бы перейти в новую систему координат с помощью замены переменных, то есть перейти к новому базису но в том же критериальном пространстве. Но это необходимо сделать так, чтобы свойства исходных семейств линий второго порядка f_1 и f_2 не менялись при переходе из исходной системы координат в новую систему и наоборот.

Другими словами необходимо повернуть их оси координат, а также сдвинуть начало координат одного из семейства.

Поворот системы координат. Что произойдет с критериальной функцией в случае поворота системы координат. Представим квадратичный полином в виде (1) при m = 2 и повернем систему координат против часовой стрелки на угол ϕ. Тогда базисные векторы e_1, e_2 перейдут в новые базисные векторы, соответственно,

$$\tilde{e}_1 = \cos\phi e_1 + \sin\phi e_2, \qquad \tilde{e}_2 = -\sin\phi e_1 + \cos\phi e_2.$$

Старые координаты x_1, x_2 будут выражаться через новые координаты $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ следующим образом

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \tilde{x}_1\tilde{e}_1 + \tilde{x}_2\tilde{e}_2 = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}.$$

Легко проверяется, что

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

В новых координатах квадратичная часть (1) $f_2(x_1, x_2)$ принимает вид

$$f_2 = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \left(\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \right)\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}.$$

Матрица в скобках есть произведение трех матриц вида $\tilde{A} = Q^T A Q$ причем A – симметричная матрица: $A^T = A$. Отсюда

$$\tilde{A}^T = \left(Q^T A Q\right)^T = Q^T A^T \left(Q^T\right)^T = Q^T A Q = \tilde{A}.$$

Значит, $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$, $1 \le i, j \le 2$, остается симметричной матрицей.

Попытаемся выбрать угол ϕ так, чтобы матрица $\tilde{A}$ приобрела диагональный вид:

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, требуется занулить элемент

$$\tilde{a}_{12} = \tilde{a}_{21} =$$

$$= \left(\cos^2\phi - \sin^2\phi\right)a_{12} - \sin\phi\cos\phi\left(a_{11} - a_{22}\right) =$$

$$= \cos(2\phi)a_{12} - \sin(2\phi)\frac{a_{11} - a_{22}}{2} = 0.$$

Если $a_{12} = 0$, то можно взять $\phi = 0$. Если $a_{12} \ne 0$, то надо решить уравнение

$$\mathrm{ctg}(2\phi) = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}.$$

Очевидно, решение существует. Поэтому всегда найдется ϕ такое, что имеет место равенство при котором $\tilde{A}$ приобретает диагональный вид. Кроме того, при любом выборе ϕ получаем

$$\lambda_1 = \cos^2\phi a_{11} + 2\cos\phi\sin\phi a_{12} + \sin^2\phi a_{22},$$

$$\lambda_2 = \sin^2\phi a_{11} - 2\cos\phi\sin\phi a_{12} + \cos^2\phi a_{22}.$$

Отсюда $\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}$. В то же время, используя равенство

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

и то, что определитель произведения матриц равен произведению определителей, находим $\lambda_1\lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$. Следовательно, λ_1 и λ_2 суть корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 - \left(a_{11} + a_{22}\right)\lambda + \left(a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right) = 0.$$

Заметим, что здесь левая часть есть в точности $\det\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix}$. Этот многочлен от λ, есть ничто иное, как характеристический многочлен матрицы $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$, следовательно, λ_1 и λ_2 являются собственными значениями этой матрицы.

Таким образом, показано, что с помощью поворота исходной системы координат на некоторый угол ϕ уравнение $f\left(x_1, x_2\right) = 0$ преобразуется в новых координатах к виду

$$\lambda_1\tilde{x}_1^2 + \lambda_2\tilde{x}_2^2 + 2b_{13}\tilde{x}_1 + 2b_{23}\tilde{x}_2 + b_{33} = 0,$$

где: $\begin{bmatrix} b_{13} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$;

$b_{33} = a_{33}$; λ_1 и λ_2 – собственные значения матрицы A_2 квадратичного полинома (1).

Сдвиг системы координат. Что касается сдвига системы координат, то естественно предположить, что квадратичная часть f_2 в повернутой системе координат не является тождественным нулем. Значит, λ_1 и λ_2 не равны нулю одновременно.

Тогда, выделим в квадратичной части полные квадраты

$$\lambda_1\tilde{x}_1^2 + 2b_{13}\tilde{x}_1 = \lambda_1\left(\tilde{x}_1^2 + 2\frac{b_{13}}{\lambda_1}\tilde{x}_1 + \frac{b_{13}^2}{\lambda_1^2}\right) - \frac{b_{13}^2}{\lambda_1^2} =$$

$$= \lambda_1\left(\tilde{x}_1 + \frac{b_{13}}{\lambda_1}\right)^2 - \frac{b_{13}^2}{\lambda_1^2},$$

$$\lambda_2\tilde{x}_2^2 + 2b_{23}\tilde{x}_2 = \lambda_2\left(\tilde{x}_2^2 + 2\frac{b_{23}}{\lambda_2}\tilde{x}_2 + \frac{b_{23}^2}{\lambda_2^2}\right) - \frac{b_{23}^2}{\lambda_2^2} =$$

$$= \lambda_2\left(\tilde{x}_2 + \frac{b_{23}}{\lambda_2}\right)^2 - \frac{b_{23}^2}{\lambda_2^2}.$$

Осуществим сдвиг декартовой системы координат $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$ поместив ее начало в точку

$$O' = \left(-\frac{b_{13}}{\lambda_1},\quad -\frac{b_{23}}{\lambda_2}\right).$$

Новые координаты z_1 и z_2 выражаются через $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$ следующим образом:

$$z_1 = \tilde{x}_1 + \frac{b_{13}}{\lambda_1},\quad z_2 = \tilde{x}_2 + \frac{b_{23}}{\lambda_2}.$$

В новых координатах уравнение $f\left(x_1, x_2\right) = 0$ теряет линейную часть и принимает вид

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + k = 0,$$

где $k = b_{33} - \frac{b_{13}^2}{\lambda_1^2} - \frac{b_{23}^2}{\lambda_2^2}$.

Таким образом, с помощью поворота и сдвига исходной системы координат уравнение $f\left(x_1, x_2\right) = 0$ приводится в новых координатах к виду $\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + k = 0$. Причем если уравнение $f\left(x_1, x_2\right) = 0$ в какой-либо декартовой системе координат имеет этот вид, то ни в какой другой декартовой системе оно не может иметь другого вида.

Нормализация критериев. Возвращаясь к вопросу нормализации, следует отметить, что новый базис можно построить, приведя квадратичную форму (1) к каноническому виду. Действительно, любая вещественная симметрическая матрица ортогонально подобна вещественной диагональной матрице

$$\Lambda = T^T A T,$$

$$T^T = T^{-1},$$

где A – матрица коэффициентов a_{ij}; Λ – диагональная матрица собственных значений матрицы A

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{bmatrix};$$

T – матрица перехода (транспонирования) от одного базиса к другому.

В новых переменных квадратичная форма (1) оказывается алгебраической суммой

$$f = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \ldots + \lambda_m z_m^2.$$

В общем случае от T можно требовать лишь невырожденности. Поиск соответствующей замены переменных (матрицы T) для заданной квадратичной формы называется приведением к каноническому виду. Если T – ортогональная матрица, то говорят о приведении (1) к главным осям, а переход осуществляется с помощью выражений

$$z = Tx,$$

и соответственно

$$x = T^{-1}z.$$

Но в нашем случае мы имеем сразу две квадратичные формы $f_1(x)$ и $f_2(x)$, которые представляют собой некоторые кривые второго порядка на плоскости. Разумно будет пытаться упростить их уравнения в одной и той же системе координат. В общем случае эта система координат будет аффинной. Следует заметить, что точки в аффинном пространстве являются равноправными, их нельзя складывать друг с другом, также в аффинном пространстве нет понятия нулевой точки или начала отсчёта.

Предположим, что одна из кривых является эллипсом. Тогда перейдем к такой декартовой системе, в который для нее получается уравнение $x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 = 1$. Уравнение второй кривой в этой системе может иметь самый общий вид. Изменив масштабы по осям, перейдем к аффинной системе, в которой уравнением эллипса будет уравнение окружности $\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 = 1$. Уравнение второй кривой в новой (аффинной) системе имеет все еще общий вид. Но с помощью поворота для его квадратичной части можно получить форму $\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2$. При этом поворот системы координат не может изменить формы первого уравнения.

Таким образом, пусть у нас имеется две вещественные симметрические матрицы A_2^1 и A_2^2, это матрицы коэффициентов a_{ij} квадратичных частей форм $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно, и при этом A_2^1 положительно определенная. В общем случае положительность матриц можно проверить с помощью критерия Сильвестра.

Тогда существует вещественная невырожденная матрица T такая, что матрицы $T^T A_2^1 T$ и $T^T A_2^2 T$ обе диагональные. То есть с помощью матрицы транспонирования T формы $f_1(x)$ и $f_2(x)$ могут быть одновременно приведены к каноническому виду.

Действительно, так как в силу положительной определенности все собственные значения матрицы A_2^1, $\lambda_i > 0$, для всех i. Тогда A_2^1 ортогонально подобна (конгруэнтна) диагональной матрице Λ

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix} = Q^T A_2^1 Q, \quad Q^T = Q^{-1},$$

где Q – матрица собственных векторов матрицы A_2^1.

Далее заметим, что A_2^1 также конгруэнтна единичной матрице I (по определению, $\Lambda^{-1/2} \equiv \left(\Lambda^{-1/2}\right)^{-1}$)

$$I = \Lambda^{-1/2} Q^T A_2^1 Q \Lambda^{-1/2} = \left(Q\Lambda^{-1/2}\right)^T A_2^1 \left(Q\Lambda^{-1/2}\right).$$

Пусть то же преобразование конгруэнтности в применении к A_2^2 дает матрицу

$$C = \left(Q\Lambda^{-1/2}\right)^T A_2^2 \left(Q\Lambda^{-1/2}\right).$$

Легко проверить, что C остается вещественной симметричной матрицей. Следовательно, с помощью ортогональной матрицы V, которая является матрицей собственных векторов матрицы C, получаем диагональную матрицу $D = V^T C V$. В данном случае D будет диагональной матрицей собственных значений матрицы C

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1^c & \\ & \lambda_2^c \end{bmatrix}.$$

В то же время, $V^T I V = I$. Окончательно

$$I = T^T A_2^1 T, \quad D = T^T A_2^2 T,$$

где $T = Q\Lambda^{-1/2} V$.

Таким образом, для того чтобы нормализовать критерии $f_1(x)$ и $f_2(x)$ (привести их к каноническому виду) необходимо:

– выделить хотя бы одну положительно определенную квадратичную часть этих критериев (к примеру, пусть в нашем случае положительно определенной будет квадратичная часть первого критерия, то есть A_2^1);

– найти собственные значения и собственные вектора положительно определенной матрицы A_2^1 и составить матрицы Λ и Q;

– с помощью квадратичной части второго критерия A_2^2 (определенность этой матрицы не важна) и матриц Λ и Q вычислить матрицу C;

– найти собственные значения и собственные вектора матрицы C и составить матрицы D и V. Хотя матрица D нужна только для проверки, в вычислениях она не используется;

– с помощью матриц Λ Q и V вычислить матрицу транспонирования T, с ее помощью и будет осуществляться переход к новому базису.

После диагонализации критериальные функции (верхние индексы при коэффициентах a_{ij} соответствуют номеру критерия)

$$f_1(x_1, x_2) = a_{11}^1 x_1^2 + 2a_{12}^1 x_1 x_2 + $$
$$+ a_{22}^1 x_2^2 + 2a_1^1 x_1 + 2a_2^1 x_2 + a_{00}^1$$
$$f_2(x_1, x_2) = a_{11}^2 x_1^2 + 2a_{12}^2 x_1 x_2 + $$
$$+ a_{22}^2 x_2^2 + 2a_1^2 x_1 + 2a_2^2 x_2 + a_{00}^2$$

будут выглядеть следующим образом

$$f_1(z_1, z_2) = (z_1 - z_{01})^2 + (z_2 - z_{02})^2 + k_1$$
$$f_2(z_1, z_2) = \lambda_1 z_1{}^2 + \lambda_2 z_2{}^2 + k_2$$

или в общем виде

$$f_1\left(z_1,z_2,...,z_m\right)=\left(z_1-z_{01}\right)^2+\left(z_2-z_{02}\right)^2+...+$$
$$+\left(z_m-z_{0m}\right)^2+k_1,$$
$$f_2\left(z_1,z_2,...,z_m\right)=\lambda_1 z_1{}^2+\lambda_2 z_2{}^2+...+\lambda_m z_m{}^2+k_2.$$

Переход от старой системы координат к новой и наоборот осуществляется с помощью выражений $z=Tx$ и $x=T^{-1}z$.

Таким образом, с помощью изменения масштаба по осям, поворота и сдвига системы координат старое семейство эллипсов (рис. 3) может быть трансформировано в семейство окружностей с центром в точке $\left(z_{01},\,z_{02}\right)$ и семейство деформированных эллипсов (рис. 4).

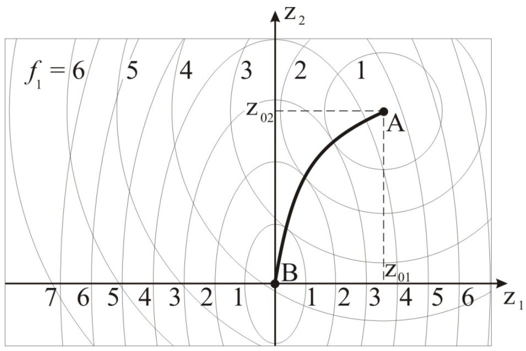

Рис. 4. Семейства деформированных эллипсов

Поиск парето-оптимальных значений массово-траекторных параметров и критериев. В содержательных терминах идея решения задачи парето-оптимального выбора МТП ТАС заключается в определении уравнения кривой АВ в многомерном пространстве исследуемых массово-траекторных параметров. Выше отмечалось, что кривая АВ (линия Парето) проходит через точки соприкосновения изоквант. Причем при переходе в новую систему координат это ее свойство не меняется, она по-прежнему остается геометрическим местом точек соприкосновения линий второго порядка нового семейства f_1 с линиями семейства f_2 (рис. 4).

Следовательно, в этих точках касательная и нормаль к изоквантам семейства f_1 совпадают с касательной и нормалью к изоквантам семейства f_2, что позволяет сформировать систему уравнений вида

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x_1-x_1^O}{\left.\dfrac{df_1}{dx_1}\right|_{M_O}}=\dfrac{x_2-x_2^O}{\left.\dfrac{df_1}{dx_2}\right|_{M_O}} \\[2ex] \dfrac{x_1-x_1^O}{\left.\dfrac{df_2}{dx_1}\right|_{M_O}}=\dfrac{x_2-x_2^O}{\left.\dfrac{df_2}{dx_2}\right|_{M_O}} \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} \dfrac{x_1-x_1^O}{x_2-x_2^O}=\dfrac{\left.\dfrac{df_1}{dx_1}\right|_{M_O}}{\left.\dfrac{df_1}{dx_2}\right|_{M_O}} \\[2ex] \dfrac{x_1-x_1^O}{x_2-x_2^O}=\dfrac{\left.\dfrac{df_2}{dx_1}\right|_{M_O}}{\left.\dfrac{df_2}{dx_2}\right|_{M_O}} \end{array}\right\},$$

где МО – точка касания; x_1^O, x_2^O – координаты точки касания.

Для того чтобы точка касания была парето-оптимальной необходимо, чтобы она принадлежала кривой АВ, то есть $M_0\left(x_1^0,x_2^0\right)\in AB$.

При переходе в новую систему координат значение $M_0\left(x_1^0,x_2^0\right)$ будет одинаковым, как и для семейства f_1, так и для f_2. В связи, с чем в новой системе координат исходная система уравнений примет следующий вид:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\dfrac{df_1}{dz_1}}{\dfrac{df_1}{dz_2}}=\dfrac{2\left(z_1-z_{01}\right)}{2\left(z_1-z_{02}\right)} \\[2ex] \dfrac{\dfrac{df_2}{dz_1}}{\dfrac{df_2}{dz_2}}=\dfrac{2\lambda_1 z_1}{2\lambda_2 z_2} \end{array}\right\}.$$

Таким образом, зная одну координату точки, уже из новой системы уравнений, можно вычислить значение другой точки по формуле

$$z_2=\frac{z_{02}}{1-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(1-\dfrac{z_{01}}{z_1}\right)}.$$

Можно показать, что в многомерном случае координаты точек, принадлежащих линии Парето, можно определить по аналогичной формуле

$$z_m=\frac{z_{0m}}{1-\dfrac{\lambda_m}{\lambda_1}\left(1-\dfrac{z_{01}}{z_1}\right)},$$

где z_{0m} – m-я координата центра семейства f_1 в новой системе координат; λ_m – собственное значение квадратичной формы f_1.

Следовательно, зная координаты центра семейства f_1 – $\left(z_{01},z_{02},...z_{0m}\right)$, собственные значения квадратичной формы f_1 – $\left(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m\right)$ и варьируя значения координаты z_1 в диапазоне $\left[0,z_{01}\right]$, можно вычислить остальные координаты точек, принадлежащих линии Парето. Применение обратных преобразований системы координат позволяет определять парето-оптимальные МТП ТАС в исходной системе координат.

Выводы и перспективы дальнейших исследований

Таким образом, имея конкретную информацию об МТП ТАС ее критерии качества можно представить в виде квадратичных полиномов. Далее применив к ним различные методы матричного анализа и линейной алгебры, можно сформировать парето-оптимальную область вариантов построения этой системы.

Данная методология позволяет в дальнейшем получить из парето-оптимальной области по значению любой одной заданной координаты – весь набор координат массово-траекторных параметров системы, а также значения критериальных функций в многомерном критериальном пространстве.

Кроме этого применив к найденной парето-оптимальной области методы формализации многокритериальных задач можно найти единственный оптимальный вариант построения трансформерной авиационной системы.

Перспективы дальнейших исследований состоят в разработке обобщенных методов оптимизации более широкого круга параметров трансформерных авиационных систем различного функционального назначения.

Литература

1. Voronin A. Multicriteria Decision–Making. Systemic Ahhroach / A. Voronin. – Lambert Academic Publishing, 2014. – 139 p. **2. Voronin A.** Theory and Practice of Multicriteria Decisions: Models, Methods, Realization / A. Voronin, Y. Ziatdinov. – Lambert Academic Publishing, 2013. – 305 p. **3. Voronin A.M.** Multicriteria optimization of dynamic control systems // Modern Information Technologies in the Sphere of Security and Defence / Voronin A.M., Ziatdinov Y.K., Permiakov Y.O., Varlamov I.D. – 2014. – No. 2 (20). pp. 38–48. **4. Saaty T.L.** Multicriteria Decision Making: The Analytical Hierarchy Process. – N.Y.: McGraw-Hill, 1990. – 380 p. **5. Voronin A.N.** A nonlinear trade-off scheme in multicriteria evaluation and optimization problems // Kibernetika i Sistemnyi Analiz. – 2009. – No. 4. pp. 106–114. **6. Лебедев А. А**. Основы синтеза систем летательных аппаратов / [А. А. Лебедев, В. Н. Баранов, В. Т. Бобронников и др.]; под ред. А. А. Лебедева. – М. : Машиностроение, 1987. – 224 с. **7. Воронин А. Н.** Сложные технические и эргатические системы: методы исследования / [А. Н. Воронин, Ю. К. Зиатдинов, А. В. Харченко, В. В. Осташевский]. – Харьков : Факт, 1997. – 240 с.

ВИЗНАЧЕННЯ ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНОЇ ОБЛАСТІ МАСОВО-ТРАЄКТОРНИХ ПАРАМЕТРІВ ТРАНСФОРМЕРНОЇ АВІАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ

[1]***Юрій Кашафович Зіатдінов*** ***(д-р техн. наук, професор)***
[1]***Альберт Миколайович Воронін*** ***(д-р техн. наук, професор)***
[2]***Олександр Юрійович Пермяков*** ***(д-р техн. наук, професор)***
[2]***Ігор Давидович Варламов*** ***(канд. техн. наук)***

[1]***Національний авіаційний університет, Київ, Україна***
[2]***Національний університет оборони України імені Івана Черняховського, Київ, Україна***

У роботі розглядається задача пошуку оптимальних варіантів побудови трансформерних авіаційних систем. При цьому визначаються таки масово-траєкторні параметри системи, які з достатньої повнотою і вірогідністю характеризують трансформер та одночасно дозволяють зменшити розмірність задачі, яка вирішується.

Трансформерність зумовлює характерну протирічність та зв'язність критеріїв оптимізації, тому окремо вирішується задача визначення координат критеріального простору, в якому здійснюється екстремізація критеріїв.

Ідея вирішення задачі парето-оптимального вибору масово-траєкторних параметрів трансформерних авіаційних систем полягає в визначенні рівняння кривої лінії Парето в багатомірному просторі масово-траєкторних параметрів, які досліджуються. В подальшому застосував методи матричного аналізу та лінійної алгебри, формується парето-оптимальна область варіантів побудови трансформерної авіаційної системи. Дана методологія дозволяє в подальшому отримати з парето-оптимальної області по значенню будь якої одної заданої координати весь набір координат масово-траєкторних параметрів системи, а також значення критеріальних функцій в багатомірному критеріальному просторі.

Ключові слова: *трансформерна авіаційна система; багатокритеріальна оптимізація; критеріальна функція; критеріальний простір.*

PARETO-OPTIMAL REGION OF MASS-TRAJECTORY PARAMETERS OF TRANSFORMER AVIATION SYSTEM

[1]***Yurii K. Ziatdinov*** ***(Doctor of Technical Sciences, Professor)***
[1]***Albert M. Voronin*** ***(Doctor of Technical Sciences, Professor)***
[2]***Oleksandr Y. Permiakov*** ***(Doctor of Technical Sciences, Professor)***
[2]***Ihor D. Varlamov*** ***(Candidate of Technical Sciences)***

[1]***National Aviation University, Kyiv, Ukraine***

[2]*National Defence University of Ukraine named after Ivan Cherniakhovsky, Kyiv, Ukraine*

The paper considers on the search optimal variants problem of transformer aviation systems construction. At the same time massively-trajectory parameters of the system are determined, which characterize the transformer with sufficient completeness and reliability and simultaneously reduce the dimensionality of the problem.

Inconsistency characteristic and connectivity optimization criteria determined by transformism, problem of determining the coordinates of a criterion space solves separatly by the way of extremization criteria.

The idea of solving the problem of Pareto-optimal region of mass trajectory parameters of transformer aviation system is to determine the equation of the Pareto curve in the multidimensional space of the investigated mass trajectory parameters. Using the methods of matrix analysis and linear algebra, Pareto-optimal region variants of construction for transformers aviation system was generated. This methodology allows to obtain the Pareto-optimal region for the value of any single specified coordinate the entire set mass-trajectory system parameters coordinates and the value of the objective functions in multi-dimensional criterion space.

Keywords: *transformer aviation system; multi-criteria optimization; criterion function; criterion space.*

References

1. Voronin A. (2014), Multicriteria Decision–Making. Systemic Ahhroach, Lambert Academic Publishing, 139 p. **2. Voronin A.** (2013), Theory and Practice of Multicriteria Decisions: Models, Methods, Realization, Lambert Academic Publishing, 305 p. **3. Voronin A.N.,** Ziatdinov Y.K., Permiakov Y.O., Varlamov I.D. (2014), Multicriteria optimization of dynamic control systems, Modern Information Technologies in the Sphere of Security and Defence, Vol. 2 (20). pp. 38–48. **4. Saaty T.L.** (1990), Multicriteria Decision Making: The Analytical Hierarchy Process, N.Y., McGraw-Hill, 380 p. **5. Voronin A.N.** (2009), A nonlinear trade-off scheme in multicriteria evaluation and optimization problems, Kibernetika i Sistemnyi Analiz, Vol. 4. pp. 106–114. **6. Lebedev A.A.**, Baranov V.N., Bobronikov V.T. and others. (1987), Fundamentals of synthesis aircrafts systems, [*Osnovy sinteza system letatelnykh aparatov*], Mashinostroenie. Moscow, 224 p. **7. Voronin A.N.,** Ziatdinov Y.K., Kharchenko A.V., Ostashevskyi V.V. (1997), Complex technical and ergatic system: research method, [*Slozhnye tekhnicheskye i ergaticheskye systemy: metody* issledovaniya], Fakt. Kharkov, 240 p.

Отримано: 07.06.2015 року