УДК 629.7

Рустам Камілович Мурасов

МЕТОДИКА ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ ВЕКТОРНОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ НА ОСНОВІ КАНОНІЧНОГО РОЗКЛАДУ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ МЕТОДУ ІНТЕГРАЛЬНИХ ОЦІНОК НА ВИЗНАЧЕНОМУ ІНТЕРВАЛІ ПРИ ВИЗНАЧЕННІ ВИПАДКОВИХ КОЕФІЦІЄНТІВ

Формулювання мети статті. Виклад основного матеріалу

Метою даної статті є проведення аналізу існуючих методів прогнозу для оптимального застосування при прогнозуванні процесів в управлінні складними процесами. Оскільки стан складної системи описується реалізацією випадкового процесу (скалярного чи векторного), то виникає необхідність прогнозу реалізації цього випадкового процесу для аналізу стану системи та ефективного управління.

Крім того, більшість складних систем характеризуються інертністю – здатністю попереднього стану системи впливати на майбутній її стан (післядією). Векторність випадкового процесу дозволяє враховувати кореляційні зв’язки проміж складовими випадкового процесу та будувати прогноз, котрий буде оперативно реагувати на зміну будь-якої складової випадкового процесу та корельованих з нею складових.

Найбільш універсальним з точки зору відсутності обмежень на клас випадкових процесів і зручним для обчислення є метод екстраполяції, що базується на канонічному розкладі Пугачова [1]. Даний розклад в дискретному ряді точок t_1, $i=\overline{1,I}$ випадкового процесу що досліджується $\overline{X}(t)$ має вигляд

$$X_h = m_h(i) + \sum_{\lambda=1}^{h}\sum_{\upsilon=1}^{i} V_{\upsilon}^{(\lambda)}\varphi_{h\nu}^{(\lambda)}(i), h=\overline{1,H}, \qquad (1)$$

де $\varphi_{h\nu}^{(\lambda)}(i)$ - невипадкові координатні функції, що визначаються як

$$\varphi_{h\nu}^{(\lambda)}(i) = \frac{1}{D_{\nu}^{(\lambda)}} M[\overset{0}{X}_h(i)V_{\nu}^{(\lambda)}],\ \varphi_{h\nu}^{(\lambda)}(i)=0 \text{ при } i>\nu \text{ або } \lambda>h; \qquad (2)$$

$$\varphi_{h\nu}^{(\lambda)}(i)=1 \text{ при } h=\lambda \text{ і } \nu=i;$$

$$\varphi_{h\nu}^{(\lambda)}(i) = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_{h1}^{(\lambda)}(2) & \varphi_{h1}^{(\lambda)}(3) & \ldots & \varphi_{h1}^{(\lambda)}(i) \\ 0 & 1 & \varphi_{h2}^{(\lambda)}(3) & \ldots & \varphi_{h2}^{(\lambda)}(i) \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & \varphi_{h3}^{(\lambda)}(i) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$V_{\nu}^{(\lambda)}$ - випадкові коефіцієнти, що мають наступні властивості:

$M[V_{\nu}^{(\lambda)}]=0$, $M[V_{\nu}^{(\lambda)}\ V_{\mu}^{(\varsigma)}]=0$ при невиконанні жодної умови $\nu=\mu$ і $\lambda=\varsigma$; $M[\left|V_{\nu}^{(\lambda)}\right|^2]=D_{\nu}^{(\lambda)}$.

$$V_{\nu}^{(\lambda)} = \overset{0}{X}_h(i) - \sum_{\lambda=1}^{h}\sum_{\nu=1}^{i-1} V_{\nu}^{(\lambda)}\varphi_{h\nu}^{(\lambda)}(i).$$

Як слідує з (2), єдиним обмеженням що накладається на процес апаратом канонічних розкладів є конечність дисперсій відповідних коефіцієнтів, що звичайно задовольняється для реальних фізичних процесів і не є суттєвим.

У [2] показано, що канонічний розклад (1) точно описує функцію що розкладеться в точках дискретизації t_1, $i=\overline{1,I}$ і забезпечує мінімум середнього квадрату помилки наближення в проміжках проміж ними. Таким чином, використання цього розкладу не здійснює загублення інформації процесу що досліджується.

Згідно [1], алгоритм оптимальної у середньоквадратичному сенсі лінійної екстраполяції реалізації процесу $\overline{X}(t)$, що заданий випадковою послідовністю (1), при довільному числі k<I моментів вимірів і числі $r_{\mu}, r_{\mu} \geq r_{\mu+1}, \mu=\overline{1,k}$ відомих значень в кожен з них має вигляд

$$\begin{aligned} m_h^{(r_1,\ldots,r_{\mu})}(i) &= m_h^{(r_1,\ldots,r_{\mu-1})}(i) + (x_{r_{\mu}}(\mu) - \\ &- m_{r_{\mu}}^{(r_1,\ldots,r_{\mu-1})}(\mu)\varphi_{h\mu}^{(r_{\mu})}(i),\ h=\overline{1,H},\ i=\overline{1,I}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Обчислення майбутніх значень $\overline{X}(t)$ у відповідності до виразу (3) починається з початкового $(\mu=1)$ значення першої складової $x_1(1)$, після чого послідовно вводяться початкові значення решти складових. Тільки після того, як використані всі відомі значення для моменту $\mu=1$ здійснюється перехід до наступного моменту $\mu=2$, повторно здійснюється послідовний перебір відомих значень в порядку зростання номерів складових. Метод (3) дає незміщену оцінку майбутніх значень реалізації що екстраполюється і в межах лінійних зв’язків забезпечує мінімум середнього квадрату похибки екстраполяції, що дорівнює дисперсії

$$D_h^{(r_1,\ldots,r_k)}(i) = \sum_{\lambda=1}^{h}\sum_{\nu=\eta_k}^{i} D_{\nu}^{(\lambda)}[\varphi_{h\nu}^{(\lambda)}(i)]^2, i=\overline{k+1,I} \qquad (4)$$

апостеріорного випадкового процесу

$$X_h^{(r_1,\dots,r_k)}(i) = m_h^{(r_1,\dots,r_k)}(i) + \sum_{\lambda=1}^{h}\sum_{\nu=\eta_k}^{i} V_\nu^{(\lambda)} \varphi_{h\nu}^{(\lambda)}(i), \quad (5)$$

$$h = \overline{1,H},\ i = \overline{1,I},\ \eta_k = \begin{cases} k+1 & \text{при } \lambda \le r_k, \\ 1 & \text{при } \lambda > r_k. \end{cases}$$

Для скалярного випадкового процесу $X(i)$ з (1) отримаємо

$$X(i) = m_x(i) + \sum_{\nu=1}^{i} V_\nu \varphi_\nu(i), \quad i = \overline{1,I}. \qquad (6)$$

З виразів зрозуміло, що $m_h^{(r_1,\dots,r_k)}(i)$ та $\varphi_{h\nu}^{(\lambda)}(i)$ використовуються в повному обсязі для побудови апостеріорного випадкового процесу. Лише випадкові коефіцієнти $V_\nu^{(\lambda)}$ використовуються не в повному. Для побудови апостеріорного процесу, як правило обирається визначена послідовність яка базується на відповідній реалізації випадкового процесу. Цьому питанню приділено недостатньо уваги, що призводить до розходження апостеріорного процесу з реальним, також апріорна послідовність може мати розходження з реальним.

Особливістю рішення даної задачі є те, що рішення повинно бути зручним для обробки на ЕОМ.

У більшості випадків принциповий вид теоретичної кривої обирається завчасно з особливості завдання що вирішується або в залежності від особливостей статистичного розподілу даних. Подібним чином будується система кривих М.О.Бородачова для наближеного представлення законів розподілу. Але даний підхід неможливо застосовувати для даного випадку, в зв’язку з неможливістю фізичного обґрунтування законів розподілу для коефіцієнтів $V_\nu^{(\lambda)}$.

Повністю формалізований підхід до вибору опису розподілу можливий на основі розподілу Пірсона. Характерною особливістю є те, що вони повністю визначаються своїми першими чотирма моментами. Тому, знаючи перші чотири моменти випадкової величини X, можливо вибрати найбільш підходящій тип розподілу і визначити тип кривої. Цей метод зручний для машинної реалізації, однак він призводить до громіздких обчислень, які пояснюються складністю виразів для деяких розподілів Пірсона.

Як слідує з вищевказаного, жоден з розглянутих класичних методів не є достатньо універсальним і одночасно придатним для машинної реалізації.

Найбільш зручним для послідуючої обробки на ЕОМ є метод інтегральних оцінок. Цей метод при обробці статистичних даних дозволяє гнучко реагувати на при отриманні оцінки невідомої функції розподілу.

Для повного врахування наявної апріорної інформації та оперативного реагування на динамічні зміни характеру випадкового процесу та підвищення точності прогнозу, пропонується застосовувати метод інтегральних оцінок на визначеному інтервалі при визначенні випадкових коефіцієнтів.

Таким чином при $M|V_\nu^{(\lambda)} - \overset{\circ}{X}{}^{(r_k)}|^2 = \min$ забезпечується максимальна точність прогнозу за наявної інформації. Розглянемо цей метод більш детально.

При визначенні “базової” послідовності випадкових коефіцієнтів $V_\nu^{(\lambda)}$ враховується максимальне наближення реального випадкового процесу до апріорної інформації (Рис.1). Але, в процесі розвитку реального випадкового процесу він може відхилитися від апріорного випадкового процесу. Ця “пам'ять” апріорного випадкового процесу буде вносити відхилення в прогноз. Оскільки математичне очікування $m_h^{(r_1,\dots,r_k)}(i)$, координатні функції $\varphi_{h\nu}^{(\lambda)}(i)$ для випадкових процесів однакові та обчислені, доцільно застосувати методику визначення випадкових коефіцієнтів. До моменту часу – k, прогноз випадкового процесу дорівнює реальному випадковому процесу відповідно рівняння (1), так доцільно здійснити на інтервалі $\{k-n, k+n\}$ інтегральну оцінку апріорних траєкторій випадкових процесів, для вибору оптимальної за мінімумом відхилення.

$$\left| \int_{k-n}^{k+n} f_{pr}(x)dx - \int_{k-n}^{k+n} f_{ps}(x)dx \right| = \min \Rightarrow opt.$$

Так, при надходженні нового значення реального випадкового процесу, буде здійснюватись перевірка апріорних випадкових процесів за критерієм оптимальності – максимального наближення апріорного випадкового процесу до реального та здійснюватись побудова прогнозу.

Рис. 1. Графіки реалізації 11-ті випадкових процесів, пунктиром показана тестова реалізація для прогнозування, математичне очікування показано штрихом

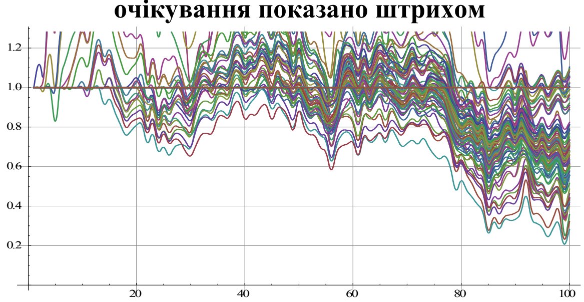

Рис. 2. Графіки координатних функцій $\varphi_{h\nu}^{(\lambda)}(i)$

Також як і у векторному випадку в межах лінійної моделі виразу (6), (7) дає незміщену оцінку майбутніх значень реалізації що екстраполюється і забезпечує мінімум середнього квадрату похибки екстраполяції, що дорівнює

$$E_x^{(k)}(i) = M\left[\left|X\{i / x(\mu), \mu = \overline{1,k}\} - m_x^{(k)}(i)\right|^2\right] = \sum_{\nu=k+1}^{i} D_\nu \phi_\nu^2(i) = D_x^{(k)}(i), \ i = \overline{k+1, I}. \qquad (7)$$

де $D_x^{(k)}(i)$, $i=\overline{k+1,I}$ – дисперсія апостеріорного випадкового процесу

$$X^{(k)}(i)=m_x^{(k)}(i)+\sum_{\nu=1}^{i}V_\nu\varphi_\nu(i),\ i=\overline{1,I}, \qquad (8)$$

що виникає з апріорного за умовою $X(\mu)=x(\mu),\ \mu=\overline{1,k}$.

Результати прогнозу відображено на рисунках 3-4 відображено 2 варіанти прогнозу.

Рис. 3. Результати прогнозу по 10 відомим значенням із застосуванням методу інтегральних оцінок на визначеному інтервалі (8-а послідовність випадкових коефіцієнтів)

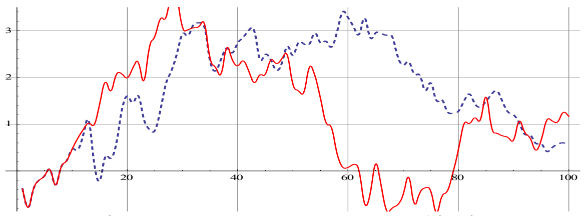

Рис. 4. Результати прогнозу по 10 відомим значенням із застосуванням методу інтегральних оцінок на визначеному інтервалі (4-а послідовність випадкових коефіцієнтів)

В залежності від інтервалу отримання апріорних даних, методом інтегральних оцінок будуть обиратися випадкові коефіцієнти $V_\nu^{(\lambda)}$ рис. 5 , які будуть забезпечувати максимальну точність прогнозу при визначених умовах.

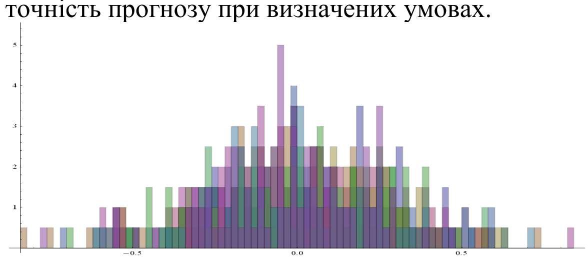

Рис. 5. Гістограма розподілу випадкових коефіцієнтів $V_\nu^{(\lambda)}$

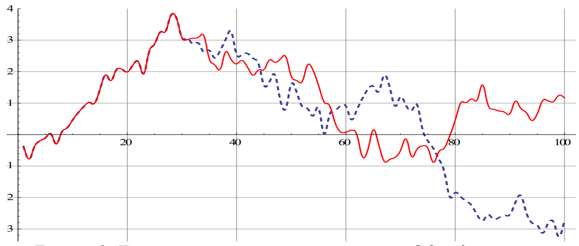

Рис. 6. Результати прогнозу по 30 відомим значенням із застосуванням методу інтегральних оцінок на визначеному інтервалі (6-а послідовність випадкових коефіцієнтів)

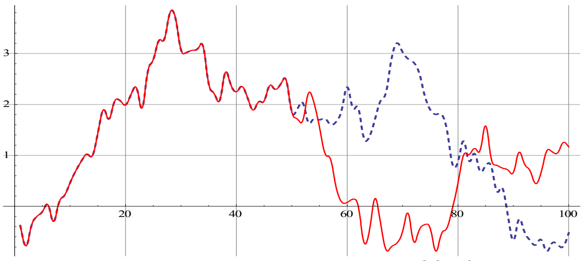

Рис. 7. Результати прогнозу по 30 відомим значенням із застосуванням методу інтегральних оцінок на визначеному інтервалі (8-а послідовність випадкових коефіцієнтів)

На рисунках 6-7 показано варіанти прогнозу за новою вибіркою випадкових коефіцієнтів та первинною. При збільшенні апріорної інформації та зміні динаміки випадкового процесу, здійснюється розходження проміж вибіркою випадкових коефіцієнтів та випадковим процесом. Але при застосуванні методу інтегральних оцінок на заданому інтервалі здійснюється корекція при виборі випадкових коефіцієнтів та підвищення точності прогнозу.

Висновки

Таким чином при використанні методу інтегральних оцінок на задоєному інтервалі здійснюється вибір випадкових коефіцієнтів для прогнозування випадкового процесу. Показана перевага даного методу перед класичними методами вибору випадкових коефіцієнтів.

Література

1. Кудрицкий В.Д. Прогнозирование надежности радиоэлектронных устройств / В.Д.Кудрицкий // Техника, 1973г.-156с. **2. Пугачев В.С.** Теория вероятностей и математическая статистика.-М.: Наука, 2002г.-496с. **3. Мурасов Р.К.** Прогнозування стану складних систем в сучасних системах управління та інтелектуальних інформаційних системах / Р. К. Мурасов, Ю.А.Дзюбенко // Збірник наукових праць Київського національного університету будівництва і архітектури. – 2011. – № 7. – С. 97–101.

В статье предложена методика экстраполяции векторного случайного процесса на основе канонического разложения с применением метода интегральных оценок на определенном интервале при определении случайных коэффициентов, что дает возможность оперативно менять базовую реализацию случайного процесса для повышения точности прогноза.

Ключевые слова: прогноз, векторный случайный процесс, интегральные оценки, канонический расписание.

The article offers method of extrapolation of vector stochastic process based on the canonical decomposition using the integral method at a certain interval when determining the random coefficients that allows you to quickly change the basic realization of the random process to improve the accuracy of the forecast.

Key words: prediction vector random process, integral evaluation canonical schedule.