УДК 532.5, 621.6

Леся Михайловна Семанишин ***(руководитель учебно-научного центра)***

Украинский государственный университет финансов и международной торговли, Киев

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ В ВОДОЕМАХ

Рассматриваются вопросы переноса радиоактивных седиментов в водоемах. Основой для моделирования двухфазных течений служит решение системы уравнений Навье—Стокса и турбулентного движения жидкости в ограниченном участке водоема (реки). Для решения системы уравнений конвективного переноса радиоактивных загрязнений используется аппроксимация соответствующих дифференциальных уравнений в частных производных конечноразностными схемами. Научной новизной результата исследования является впервые предложенное моделирование двухфазных течений в турбулентном потоке в водоемах. Метод отличается от известных тем, что в основе для моделирования заложен принцип решение системы уравнений Навье-Стокса и турбулентного движения жидкости в ограниченном участке водоема (реки). Для решения системы уравнений конвективного переноса радиоактивных загрязнений, используется аппроксимация соответствующих дифференциальных уравнений в частных производных конечноразностными схемами.

Ключевые слова: *метод, моделирование, принцип, система уравнения Навье-Стокса, турбулентное движение, жидкость.*

Постановка проблемы и связь ее с важными научными заданиями

Двухфазные течения широко используются в различных промышленных, технологических, энергетических установках.

В большинстве двухфазных потоков несущая среда переносит частички большей плотности, чем основной поток. Такими являются твердые частички или капли жидкости в газовом потоке, твердые частички в жидкости. Наиболее изученным есть, обычно, самый простой тип течения – движение твердой частички сферической формы с постоянной массой при отсутствии теплообмена и химических реакций. Несферичность формы учитывается с помощью эмпирических поправок в законе их аэродинамического сопротивления потоку.

Увеличение концентрации частиц приводит к их взаимодействию и влиянию на аэродинамику несущего потока. При объемной концентрации $c' \leq 2 \cdot 10^{-2}$ эффекты взаимодействия очень малы, и каждая частица движется в потоке без взаимодействия з другими.

Если размеры частиц малы по сравнению с наименьшим масштабом турбулентности, частицы строго отслеживают поток, и их поведение определяется, в основном, турбулентной диффузией, а не центробежными силами. Влияние турбулентности на крупные частицы проявляется в увеличении сопротивления частиц течению.

Анализ последних исследований и публикаций

Проблемам исследования качества поверхностных вод и их математического моделирования уделяется значительное внимание отечественных и зарубежных ученых. Значительный вклад в решение этих проблем внесли Г.И. Марчук, М.З. Згуровский, В.В. Скопец, М.Й. Железняк, О.А Самарский. Основной подход в этих трудах посвящен использованию разностных схем для числового моделирования движения поверхностных вод и распространения загрязнений.

Развитие дальнейших исследований автором было направлено на: математическое моделирование содержания растворенного кислорода и биохимического употребления кислорода в поверхностных водах [1], оценка качества поверхностных вод представлена [2], а процесс моделирование процессов очистки водоемов [3]. Практическая фаза исследований представлена в работах [4, 5]

В то же время актуальным является вопрос рассмотрения повышения эффективности и быстродействия решения соответствующих математических моделей, которые основываются на численно-аналитических методах решения соответствующих краевых задач математической физики.

Формулировка целей статьи

Автором поставлена в статье цель – предложить решение научной задачи конвективного переноса радиоактивных загрязнений путем предложенного впервые моделирование двухфазных течений в турбулентном потоке в водоемах.

Результат исследования

Рассмотрим математическую модель, описывающую движение одиночной частицы сферической формы с постоянной массой при отсутствии химических реакций.

Уравнение движения частицы в турбулентном потоке учитывает только силы аэродинамического сопротивления и силы тяжести [6]:

$$m\frac{dv}{dt} = mF_t(u-v) + mg. \tag{1}$$

$$F_t = \frac{3}{4}\lambda_{\Gamma,ch}\frac{\rho}{\rho_{ch}}\frac{1}{d_{ch}}|u-v|. \tag{2}$$

Уравнение (1) с учетом силы сопротивления (2) приобретает вид

$$\frac{dv}{dt} = F_p(u-v)|u-v| + g, \quad F_p = \frac{3}{4}\lambda_{\Gamma,ch}\frac{\rho}{\rho_{ch}}\frac{1}{d_{ch}}. \tag{3}$$

В уравнении (3) dv_k/dt – субстанциональные производные.

$$\frac{dv_k}{dt} = \frac{\partial v_k}{\partial t} + (u\cdot\nabla)v_k = \frac{\partial v_k}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} u_j\frac{\partial v_j}{\partial x_j}, \quad k = 1,2,3.$$

Видим, что эти уравнения – нелинейные уравнения в частных производных первого порядка (гиперболического типа). Обозначим $w = u - v$. Тогда уравнения (3) запишутся так:

$$\frac{\partial w_k}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} u_j\frac{\partial w_j}{\partial x_j} = \frac{du_k}{dt} + \sum_{j=1}^{3} u_j\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + F_p w_k|w| + g. \tag{4}$$

В большинстве известных публикаций уравнения типа (4) рассматривают как обыкновенные уравнения относительно производной по времени и не учитывают конвективной составляющей (считая скорости потока усредненными). Это обстоятельство существенно искажает суть динамики движения твердых частиц в воздушно-жидкостном потоке смеси.

Будем рассматривать движение твердых частиц в воздушно – жидкостном потоке смеси в водоемах, в которых протяженность по координате x существенно больше, чем по координате y. Ось Oz направлена вглубь водоема (реки). Тогда участок водоема можно рассматривать как двумерный по пространственным координатам.

Система уравнений (4) приобретает следующий вид.

$$\frac{\partial w_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial w_x}{\partial x} + u_z\frac{\partial w_x}{\partial z} = \frac{du_x}{dt} + F_p w_x\sqrt{w_x^2 + w_z^2} = G_x(u,w,t); \tag{5}$$

$$\frac{\partial w_z}{\partial t} + u_x\frac{\partial w_z}{\partial x} + u_z\frac{\partial w_z}{\partial z} = \frac{du_z}{dt} + F_p w_z\sqrt{w_x^2 + w_\phi^2 + w_z^2} - g = G_z(u,w,t). \tag{6}$$

Поскольку в системе (5), (6) присутствует скорость движения несущей субстанции (газ или жидкость), это приводит к необходимости решения системы уравнений движения частиц и движения несущей субстанции, то есть турбулентного движения. Для упрощения предположим, что в области, в которой движение твердых частиц является существенным (например, донная зона водоема), составляющие скорости движения несущей субстанции определены (установившиеся либо стационарные). Выражения для компонент скорости потока получены в результате решения системы уравнений Навье-Стокса с учетом турбулентного движения воздушно-жидкостной смеси [7].

$$u_x^{(1)}(x,z,t) = \sum_{m_u,l_u} Z_u(\alpha^u_{m_u},z)X_u(\beta_{l_u},x)\left[U1^0_{m_u,l_u} + e^{-\sigma^u_{m_u,l_u}t}[U1^1_{m_u,l_u}\,\phi1^u_{m_u,l_u}(t) + U2^2_{m_u,l_u}\,\phi2^u_{m_u,l_u}(t)\right]. \tag{7}$$

$$u_z^{(1)}(x,z,t) = \sum_{m_w,l_w} Z_w(\alpha^w_{m_w},\zeta)X_w(\beta_{l_w},x)\times$$
$$\times\left[W1^0_{m_w,l_w} + e^{-\sigma^w_{m_w,l_w}t}[W1^1_{m_w,l_w}\,\phi1^w_{m_w,l_w}(t) + W2^2_{m_w,l_w}\,\phi2^w_{m_w,l_w}(t)\right]. \tag{8}$$

Там же приведены алгоритмы определения коэффициентов в этих выражениях. Z_u, Z_w, X_u, X_w – собственные функций краевой задачи для уравнений Навье—Стокса.

$$Z_u(\alpha_m,z) = \frac{1}{\mathsf{P}|Z_u(\alpha_m,h)\mathsf{P}|}\left[\cos(\alpha_m z) + \frac{\alpha_m}{d}\sin(\alpha_m z)\right];$$

$$X_u(\beta_{m,l}x) = \frac{1}{\mathsf{P}|X_u(\beta_{m,l}L)\mathsf{P}|}\cos(\beta_{m,l}x).$$

В соответствии с известной схемой расщепления на элементарные операторы [8] оператор $A\phi = u\partial\phi/\partial x + u\partial\phi/\partial z$ можно представить в виде

$$A\phi = u\frac{\partial\phi}{\partial x} + w\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\phi}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Обозначим выражения для компонент скорости движения жидкости (субстанциональные производные) как

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} =$$

$$= \frac{(u_x)_k^j - (u_x)_k^{j-1}}{\tau} + \frac{(u_x)_k^j}{h_x}\left[(u_x)_{k+1}^j - (u_x)_k^j\right] + \frac{(u_z)_k^j}{h_z}\left[(u_x)_{k+1}^j - (u_x)_k^j\right] = (C_x)_k^j;$$

$$\frac{du_z}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{(u_z)_k^j - (u_z)_k^{j-1}}{\tau} + \frac{(u_x)_k^j}{h_x}\left[(u_z)_{k+1}^j - (u_z)_k^j\right] + \frac{(u_z)_k^j}{h_z}\left[(u_z)_{k+1}^j - (u_z)_k^j\right] = (C_z)_k^j.$$

Таким образом, уравнения (5), (6) аппроксимируют такими разностными уравнениями:

относительно w_x:

$$(w_x)_k^{j-1/2} - (w_x)_k^{j-1} + \frac{\tau}{2h_x}\{(u_x)_k^j\left[(w_x)_{k+1}^{j-1/2} - (w_x)_k^{j-1/2} + (w_x)_{k+1}^{j-1} - (w_x)_k^{j-1}\right] +$$

$$+\frac{1}{2}[(u_x)_{k+1}^j - (u_x)_k^j][(w_x)_k^{j-1/2} + (w_x)_k^{j-1}] + F_p (w_x)_k^{j-1}\sqrt{(w_x^2)_k^{j-1} + (w_z^2)_k^{j-1}}\} = (C_x)_k^{j-1};$$

$$(w_x)_k^j - (w_x)_k^{j-1/2} + \frac{\tau}{2h_z}\{(u_z)_k^j\left[(w_x)_{k+1}^j - (w_x)_k^j + (w_x)_{k+1}^{j-1/2} - (w_x)_k^{j-1/2}\right] +$$

$$+\frac{1}{2}[(u_z)_{k+1}^j - (u_z)_k^j][(w_x)_k^j + (w_x)_k^{j-1/2}] + F_p (w_x)_k^{j-1/2}\sqrt{(w_x^2)_k^{j-1/2} + (w_z^2)_k^{j-1/2}}\} = (C_x)_k^{j-1/2};$$

$$(w_x)_k^{j+1/2} - (w_x)_k^j + \frac{\tau}{2h_z}\{(u_z)_k^j\left[(w_x)_{k+1}^{j+1/2} - (w_x)_k^{j+1/2} + (w_x)_{k+1}^j - (w_x)_k^j\right] +$$

$$+\frac{1}{2}[(u_z)_{k+1}^j - (u_z)_k^j][(w_x)_k^{j+1/2} + (w_x)_k^j] + F_p (w_x)_k^j\sqrt{(w_x^2)_k^j + (w_z^2)_k^j}\} = (C_x)_k^j;$$

$$(w_x)_k^{j+1} - (w_x)_k^{j+1/2} + \frac{\tau}{2h_x}\{(u_x)_k^j\left[(w_x)_{k+1}^{j+1} - (w_x)_k^{j+1/2} + (w_x)_{k+1}^{j+1/2} - (w_x)_k^{j+1/2}\right] +$$

$$+\frac{1}{2}[(u_x)_{k+1}^j - (u_x)_k^j][(w_x)_k^{j+1} + (w_x)_k^{j+1/2}] + F_p (w_x)_k^{j+1/2}\sqrt{((w_x^2)_k^{j+1/2} + ((w_z^2)_k^{j+1/2}}\} = (C_x)_k^{j+1/2};$$

относительно w_z:

$$(w_z)_k^{j-1/2} - (w_z)_k^{j-1} + \frac{\tau}{2h_x}\{(u_x)_k^j\left[(w_z)_{k+1}^{j-1/2} - (w_z)_k^{j-1/2} + (w_z)_{k+1}^{j-1} - (w_z)_k^{j-1}\right] +$$

$$+\frac{1}{2}[(u_x)_{k+1}^j - (u_x)_k^j][(w_z)_k^{j-1/2} + (w_z)_k^{j-1}] + F_p (w_z)_k^{j-1}\sqrt{(w_x^2)_k^{j-1} + (w_z^2)_k^{j-1}}\} = (C_z)_k^{j-1} - g;$$

$$(w_z)_k^j - (w_z)_k^{j-1/2} + \frac{\tau}{2h_z}\{(u_z)_k^j\left[(w_z)_{k+1}^j - (w_z)_k^j + (w_z)_{k+1}^{j-1/2} - (w_z)_k^{j-1/2}\right] +$$

$$+\frac{1}{2}[(u_z)_{k+1}^j - (u_z)_k^j][(w_z)_k^j + (w_z)_k^{j-1/2}] + F_p (w_z)_k^{j-1/2}\sqrt{(w_x^2)_k^{j-1/2} + (w_z^2)_k^{j-1/2}}\} = (C_z)_k^{j-1/2} - g;$$

$$(w_z)_k^{j+1/2} - (w_z)_k^j + \frac{\tau}{2h_z}\{(u_z)_k^j\left[(w_z)_{k+1}^{j+1/2} - (w_z)_k^{j+1/2} + (w_z)_{k+1}^j - (w_z)_k^j\right] +$$

$$+\frac{1}{2}[(u_z)_{k+1}^j - (u_z)_k^j][(w_z)_k^{j+1/2} + (w_z)_k^j] + F_p (w_z)_k^j\sqrt{(w_x^2)_k^j + (w_z^2)_k^j}\} = (C_z)_k^j - g;$$

$$(w_z)_k^{j+1} - (w_z)_k^{j+1/2} + \frac{\tau}{2h_x}\{(u_x)_k^j\left[(w_z)_{k+1}^{j+1} - (w_z)_k^{j+1/2} + (w_z)_{k+1}^{j+1/2} - (w_z)_k^{j+1/2}\right] +$$

$$+\frac{1}{2}[(u_x)_{k+1}^j - (u_x)_k^j][(w_z)_k^{j+1} + (w_z)_k^{j+1/2}] + F_p (w_z)_k^{j+1/2}\sqrt{((w_x^2)_k^{j+1/2} + ((w_z^2)_k^{j+1/2}}\} = (C_z)_k^{j+1/2} - g.$$

Эта система уравнений линейна относительно искомых функций $(w_x)_k^{j+1}$, $(w_z)_k^{j+1}$. На каждом слое j решаются две системы разностных уравнений для всех $k = \overline{0, N-1}$ относительно $(w_x)^{j-1/2}$, $(w_x)^j$, $(w_x)^{j+1/2}$, $(w_x)^{j+1}$ та $(w_z)^{j-1/2}$, $(w_z)^j$, $(w_z)^{j+1/2}$, $(w_z)^{j+1}$.

При этом, решение первого уравнения учитывается при решении следующего (имеются в виду нелинейные составляющие – выражение $u\,|\,u - v = w\,|$).

На рис. 1, 2 приведены распределения концентрации загрязнения на участке исследуемого водоема, полученные в процессе математического моделирования.

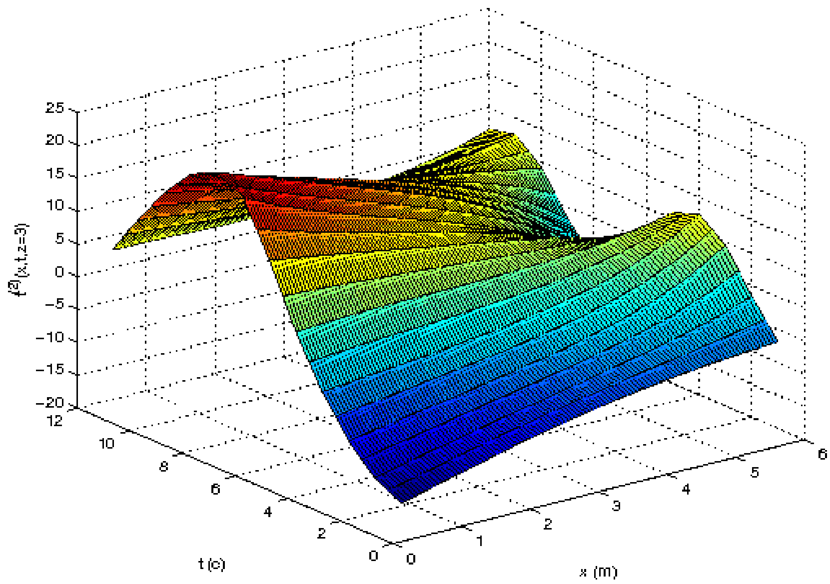

Рис. 1. Распределение концентрации загрязнения вдоль оси OX

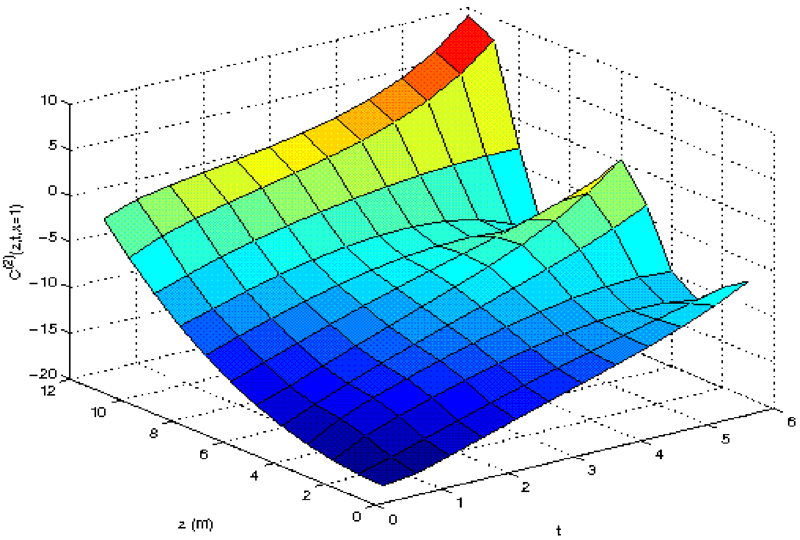

Рис. 2. Распределение концентрации загрязнения вдоль оси OZ

Выводы из данного исследования

Загрязнение окружающей среды и другие негативные факторы влияния цивилизации на природу создают угрозу не только существования растительного и животного мира, но и жизни человека. Экологические проблемы охватывают достаточно широкий диапазон вопросов, которые нуждаются в немедленном решении, причем эти вопросы должны решаться комплексно. Поэтому нет сомнений в том, что без решения экологических проблем невозможно последующее развитие общества. Таким образом, исследования автора имеют не только теоретическое, но и практическое значение для экологической безопасности Украины. Предложенное решение по результатам компьютерного моделирования системы разностных уравнений позволяет оперировать качественными и количественными показателями доли твердых примесей (загрязнения), которые осели на дно водоема, и доли загрязнения, которые остаются в водной среде в виде суспензий (в зависимости от плотности входной смеси источника загрязнений).

Практическое значение полученных результатов

Практическое значение полученного результата заключается в реализации теоретических положений и алгоритмов для исследования процессов распространения загрязняющих веществ в водных экосистемах.

Предложеный алгоритм решения краевых задач, которые описывают эти процессы, и их реализация предоставляют возможность строить прогнозные модели с целью диагностики возможных путей распространения радиационных загрязнений в водных экосистемах.

Предложеный метод может применяться для исследования разнообразных физических процессов, математические модели которых описываются нелинейными дифференциальными уравнениями.

Новизна результата

Научной новизной результата исследования является:

впервые предложено моделирование двухфазных течений в турбулентном потоке в водоемах. Метод отличается от известных тем, что в основе для моделирования заложен принцип решение системы уравнений Навье-Стокса и турбулентного движения жидкости в ограниченном участке водоема (реки). Для решения системы уравнений конвективного переноса радиоактивных загрязнений, используется аппроксимация соответствующих дифференциальных уравнений в частных производных конечноразностными схемами.

впервые описано вопрос переноса радиоактивных седиментов в водоемах, что позволило решать данный класс научных задач.

Литература

1. Зеленський К.Х. Математичне моделювання вмісту розчиненого кисню та біохімічного вживання кисню у поверхневих водах / К.Х. Зеленський, Л.М. Семанишин // Міжв. Наук.-техн. Зб. Адаптивні системи автоматичного управління, 2007. – №11(31). – С.112 – 117. **2. Зеленський К.Х.** Оцінка якості поверхневих вод / К.Х. Зеленський, Л.М. Семанишин // Восточно-европейский журнал передовых технологий, 2008. – №2(32). – С.13 – 16. **3. Семанишин Л.М.** Моделювання процесів очищення водоймі / Л.М. Семанишин // Доповіді міжнародної наукової конференції ISDMCI'2009, Євпаторія, 2009. – С. 89 – 90. **4. Семанишин Л.М.** Моделювання радіаційного забруднення у відкритих водоймах / Л.М. Семанишин // Доповіді міжнародної наукової конференції ISDMCI'2011, – Євпаторія, 2011. – С.108 – 110. **5. Семанишин Л.М.** Моделювання процесу розповсюдження забруднюючих речовин у мілких водоймах / Л.М. Семанишин // Тези доповідей VI Всеукраїнської науково-практичної конференції «Комп'ютерні технології: наука і освіта, – Київ, 2012. – С.128 – 132. **6. Теплообмен** и гидродинамика в полях центробежных массовых сил / А.А. Халатов, А.А. Авраменко, И.В. – Киев: Ин-т техн. Теплофизики НАН Украины, 2000. – 474 с. **7. Ітераційний** метод розв'язання систем нелінійних рівнянь із частинними похідними/К.Х. Зеленський // Наукові нотатки Луцького національного університету, 2009. – Вип. 36. – С.71 – 86. **8. Марчук Г.И.** Методы вычислительной математики : Учеб. пособие.— 3-е изд., перераб. и доп./ Г.И. Марчук. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.—608 с.— ISBN 5-02-014222-0

МОДЕЛЮВАННЯ ДВОФАЗНИХ ТЕЧІЙ В ТУРБУЛЕНТНОМУ ПОТОЦІ У ВОДОЙМИЩАХ

Леся Михайлівна Семанишин ***(керівник навчально-наукового центру)***

Український державний університет фінансів і міжнародної торгівлі, Київ

Розглядаються питання перенесення радіоактивних седиментів у водоймищах. Основою для моделювання двофазних течій служить рішення системи рівнянь Навьє-Стокса і турбулентного руху рідини в обмеженій ділянці водоймища (річки). Для вирішення системи рівнянь конвективного перенесення радіоактивних забруднень використовується апроксимація відповідних диференціальних рівнянь в приватних похідних кінцеворізносними схемами. Науковою новизною результату дослідження є вперше запропоновано моделювання двофазних течій в турбулентному потоці у водоймищах. Метод відрізняється від відомих тим, що в основі для моделювання закладений принцип вирішення системи рівнянь Навьє-Стокса і турбулентного руху рідини в обмеженій ділянці водоймища (річки). Для вирішення системи рівнянь конвективного перенесення радіоактивних забруднень, використовується апроксимація відповідних диференціальних рівнянь в приватних похідних кінцеворізносних схемами.

Ключові слова: *метод, моделювання, принцип, система рівняння Навьє-Стокса, турбулентний рух, рідина.*

DESIGN OF DIPHASIC FLOWS IN A TURBULENT STREAM IN RESERVOIRS

Lesya Semanyshyn ***(Head of an Educational and Research Center)***

Ukrainian State University of Finances and International Trade, Kyiv

The questions of transfer of radio-active sedimentov in reservoirs are examined. The basis for the design of diphasic flows is solution of the Navier-Stokes equations system and turbulent motion of liquid in the limited area of reservoir (rivers). For solution of equations system of radioactive pollution convection transfer use approximation of the corresponding differential equations in partial differentiations by finite-difference schemes. The scientific novelty of research result is the design of diphasic flows in a turbulent stream in reservoirs. The method differs from known that it is based on principle of solution of the Navier-Stokes equations system and turbulent motion of liquid in the limited area of reservoir (rivers). For solution of equations system of radioactive pollution convection transfer use approximation of the corresponding differential equations in partial differentiations by finite-difference schemes.

Key words: *method, design, principle, Navier-Stokes equations system, turbulent motion, liquid.*