УДК 519.876.2

Едуард Олександрович Кузьмін *(канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри)*
Володимир Миколайович Лук'янчук *(канд. військ. наук, доцент, доцент кафедри)*

Національний університет оборони України імені Івана Черняховського, Київ

ПРАКТИЧНІ ПРИЙОМИ ДОСЛІДЖЕННЯ БЕЗПЕРЕРВНИХ ЛАНЦЮГІВ МАРКОВА

У статті запропоновані прийоми аналізу однорідних ланцюгів Маркова з дискретними станами, в основі яких лежить використання перетворення Лапласа. Перехід до системи алгебраїчних рівнянь дозволяє здійснити аналіз ланцюга із застосуванням стандартного програмного забезпечення комп'ютера. Подані правили утворення коефіцієнтів характеристичного поліному, які дозволяють запрограмувати його розрахунок. Визначення коренів характеристичного рівняння дозволяє підійти до дослідження ланцюга як динамічної системи.

Ключові слова: *рівняння Колмогорова, перетворення Лапласа, імовірність стану ланцюга, визначник.*

Постановка проблеми

Дослідження однорідних безперервних ланцюгів Маркова, зокрема, визначення ймовірностей станів, веде до необхідності розв'язання системи лінійних диференціальних рівнянь, що потребує наявності відповідного програмного забезпечення. В статті розглядається можливість використання перетворення Лапласа для формалізації визначення ймовірностей станів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Використання перетворення Лапласу для розв'язання системи лінійних диференціальних рівнянь є відомим. У статті цей спосіб доведений до формулювання алгоритму знаходження визначників, потрібних для безпосереднього розрахунку ймовірностей станів однорідного безперервного ланцюга Маркова.

Мета статті

Метою даної статті є розроблення практичних прийомів дослідження однорідних ланцюгів Маркова з використанням стандартного програмного забезпечення комп'ютера, які дозволяють виконувати розрахунки за алгебраїчними співвідношеннями.

Виклад основного матеріалу дослідження

Дослідження випадкових процесів, що відбуваються у різних галузях військової справи, у багатьох випадках приводить до аналізу безперервних ланцюгів Маркова. Достатньо послатися на системи масового обслуговування, які являють собою частковий випадок ланцюгів Маркова. Тому відпрацювання практичних прийомів аналізу останніх може стати корисним під час створення та дослідження моделей діяльності військ.

Повне математичне дослідження властивостей, або показників ефективності безперервного ланцюга Маркова, як відомо, здійснюється після розв'язання системи лінійних диференціальних рівнянь, яка його описує (рівняння Колмогорова) та яка складається безпосередньо після розробки графу ланцюга [2]:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1(t)}{dt} = -a_1 p_1(t) + \lambda_{21} p_2(t) + \lambda_{31} p_3(t) + ... + \lambda_{n1} p_n(t); \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = +\lambda_{12} p_1(t) - a_2 p_2(t) + \lambda_{32} p_3(t) + ... + \lambda_{n2} p_n(t); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dp_n(t)}{dt} = +\lambda_{1n} p_1(t) + \lambda_{2n} p_2(t) + \lambda_{3n} p_3(t) + ... - a_1 p_n(t), \end{cases} \quad (1)$$

де p_i (t) – ймовірність i-го визначеного стану ланцюга;

λ_{ij} – інтенсивність потоку подій (щільність імовірності переходу з і-го стану у j-й стан), що в загальному випадку є функцією часу;

$a_i = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ik}$ – сумарна інтенсивність потоків, що виходять із і-го стану.

Загальним способом розв'язання системи (1) є рішення її чисельними методами [2]. Якщо інтенсивності потоків λ_{ij} не змінюються у часі (ланцюг Маркова є однорідним), стає можливим використання відомих аналітичних методів, хоча трудомісткість їх суттєво залежить від порядку системи.

Використання чисельних методів потребує наявності у складі програмного забезпечення комп'ютера програми розв'язання системи диференціальних рівнянь, що може стати обмеженням у можливостях користувача. Нижче показано, що цю ж задачу для однорідного ланцюга Маркова можна розв'язати, користуючись офісним програмним забезпеченням, зокрема електронними таблицями Excel.

Здійснимо у системі (1) перехід до зображень за Лапласом [1]. Результатом перетворення за Лапласом є система лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} (s+a_1)p_1(s) & -\lambda_{21}p_2(s) & -\lambda_{31}p_3(s) & -...-\lambda_{n1}p_n(s) & = p_1(0); \\ -\lambda_{12}p_1(s) & +(s+a_2)p_2(s) & -\lambda_{32}p_3(s) & -...-\lambda_{n2}p_n(s) & = p_2(0); \\ -\lambda_{13}p_1(s) & -\lambda_{23}p_2(s) & +(s+a_3)p_3(s) & -...-\lambda_{n3}p_n(s) & = p_3(0); \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda_{1n}p_1(s) & -\lambda_{2n}p_2(s) & -\lambda_{3n}p_3(s) & +(s+a_n)p_n(s) & = p_n(0). \end{cases} \quad (2)$$

Тут вільними членами є початкові значення ймовірностей $p_i(0)$.

Розв'язання цієї системи виконується за відомим з лінійної алгебри правилом Крамера [4] та веде до одержання рішення у вигляді сукупності зображень ймовірностей станів $p_i = \frac{\Delta_i(s)}{\Delta(s)}$, де $\Delta(s)$ – головний визначник системи (2), $\Delta_i(s)$ – визначник, що утворюється з $\Delta(s)$ підстановкою замість i-го стовпця $\Delta(s)$ стовпця вільних членів рівнянь. Обидва визначника, як функції змінної s, являють собою поліноми.

Зворотне перетворення Лапласу потребує лише знання коренів s_k поліному $\Delta(s)$. Якщо, наприклад, всі корені є різними, можна одразу записати вирази для оригіналів ймовірностей [1]:

$$p_i(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta_i(s_k)}{\Delta'(s_k)} \exp(s_k t). \qquad (3)$$

(Випадок комплексно-спряжених коренів не розглядається. Взагалі питання про характер коренів
поліному $\Delta(s)$ вимагає окремого розгляду).

Подальший аналіз порядку знаходження оригіналів $p_i(t)$ потребує детальнішого аналізу поліному $\Delta(s)$, що є характеристичним поліномом системи (2). Він утворюється при розкритті головного визначника системи (2) та має вигляд:

$$\Delta(s) = A_n s^n + A_{n-1}s^{n-1} + ... + A_1 s + A_0. \qquad (4)$$

Знайдемо правила утворення коефіцієнтів Am поліному (4). Для цього запишемо головний визначник системи, поклавши s=0:

$$\Delta(0) = \begin{vmatrix} a_1 & -\lambda_{21} & -\lambda_{31} & ... & -\lambda_{n1} \\ -\lambda_{12} & a_2 & -\lambda_{32} & ... & -\lambda_{n2} \\ -\lambda_{13} & -\lambda_{23} & a_3 & ... & -\lambda_{n3} \\ .... & .... & .... & ... & .... \\ -\lambda_{1n} & -\lambda_{2n} & -\lambda_{3n} & ... & a_n \end{vmatrix} \qquad (5)$$

Виявляється, що кожний коефіцієнт Am $(0 \le m \le (n-1))$ дорівнює сумі визначників, що утворюються з визначника $\Delta(0)$ після залишення в ньому рядків та стовпців, на перетині яких стоять сполучення з m елементів ai його головної діагоналі. Число таких сполучень $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, отже і число визначників у сумі також дорівнює C_n^m. Зокрема, $A_0 = \Delta(0), A_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} a_i, A_n = 1.$

Як приклад, запишемо вирази для коефіцієнтів A_m для ланцюга Маркова при n = 4:

$$A_4 = 1; \quad A_3 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4;$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} a_1 & -\lambda_{21} \\ -\lambda_{12} & a_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & -\lambda_{31} \\ -\lambda_{13} & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & -\lambda_{41} \\ -\lambda_{14} & a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & -\lambda_{32} \\ -\lambda_{23} & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & -\lambda_{42} \\ -\lambda_{24} & a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & -\lambda_{31} \\ -\lambda_{34} & a_4 \end{vmatrix};$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} a_1 & -\lambda_{21} & -\lambda_{31} \\ -\lambda_{12} & a_2 & -\lambda_{32} \\ -\lambda_{13} & -\lambda_{23} & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & -\lambda_{32} & -\lambda_{42} \\ -\lambda_{23} & a_3 & -\lambda_{43} \\ -\lambda_{24} & -\lambda_{34} & a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & -\lambda_{21} & -\lambda_{41} \\ -\lambda_{12} & a_2 & -\lambda_{42} \\ -\lambda_{14} & -\lambda_{24} & a_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & -\lambda_{31} & -\lambda_{41} \\ -\lambda_{13} & a_3 & -\lambda_{43} \\ -\lambda_{14} & -\lambda_{34} & a_4 \end{vmatrix}$$

$$A_0 = 0.$$

Розрахунок коефіцієнтів A_m легко програмується в Excel з використанням макросів, якщо задана кількість n станів ланцюга.

Звертаючись до визначника $\Delta(0)$, нагадаємо [2], що сума елементів будь-якого його стовпця завжди дорівнює 0. (До речі, цей факт можна використовувати для перевірки вірності запису системи рівнянь, що описує ланцюг Маркова). Це означає, що будь-який рядок визначника є лінійною комбінацією інших його рядків. З цього випливає, що $\Delta(0)$ завжди дорівнює нулю (A_0=0). Тому загальним виглядом характеристичного поліному є:

$$\Delta(s) = s(s^{n-1} + A_{n-1}s^{n-2} + ... + A_2 s + A_1) = s\delta(s), \quad (6)$$

тобто один корінь поліному обов'язково буде нульовим.

Відмітимо, що у будь-якому випадку всі коефіцієнти A_m завжди мають знак плюс. Це, до речі, може стати перевіркою вірності визначення коефіцієнтів.

Аналіз ланцюга Маркова веде до вивчення декількох питань.

Перш за все необхідно з'ясувати, чи є в системі граничний стаціонарний (в імовірнісному смислі) режим. Необхідною та достатньою умовою для цього є від'ємні знаки всіх коренів поліному $\delta(s)$. Сувора перевірка знаків коренів може бути здійснена, наприклад, за критерієм Гурвіца [1], хоча у [2] доводиться, що стаціонарний режим існує завжди.

Після перевірки існування стаціонарного режиму можна, користуючись теоремою про кінцеві значення оригіналів $p_i(t)$, знайти величини ймовірностей стаціонарного режиму:

$$\lim_{t\to\infty} p_i(t) = \lim_{p\to 0} sp_i(s) = \frac{\Delta_i(0)}{\delta(0)} = \frac{\Delta_i(0)}{A_1}. \qquad (7)$$

Тут $\Delta_i(0)$ утворюється заміною i-го стовпця визначника $\Delta(0)$ стовпцем вільних членів рівнянь (2), причому можна прийняти, що система розглядається із початкового положення, коли $p_1(0)$=1, а імовірності всіх інших станів дорівнюють нулю. Це не впливає на загальні висновки, оскільки нумерація станів є довільною.

Вирази для $p_i(0)$ можна записати дещо інакше, якщо урахувати, що для будь-якого моменту часу сума ймовірностей завжди дорівнює одиниці. Тому

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_i(0)}{A_1} = 1, \qquad (8)$$

звідки $A_1 = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i(0).$

Таким чином, визначення усталених значень ймовірностей станів ланцюга Маркова потребує лише утворення визначника (5), що здійснюється безпосередньо після запису рівнянь системи, та знаходження визначників $\Delta_i(0)$. Формула (8) залишається вірною для будь-яких початкових умов. Всі розрахунки можуть бути виконані з використанням електронних таблиць Excel. Застосовуючи макроси, можна створити загальні програми розрахунку.

Аналіз динаміки ланцюга Маркова доцільно розпочати з визначення часу T переходу ланцюга до стаціонарного режиму, тобто часу, коли при t>T $p_i(t) - p_i(\infty) \le \varepsilon$, де мале ε вибирається за конкретних умов функціонування ланцюга. Звичайно вважається, що ε = 0,05.

Оскільки $p_i(t)$ є суперпозицією експоненціальних функцій (3), можна вважати, що найбільш впливає на значення часу T складова $p_i(t)$ з найменшим за модулем коренем s_{min}, тому що її згасання буде най триваліішим. Тому приблизно можна записати

$$p_i(t) - p_i(\infty) \approx \frac{\Delta_i(s_{min})}{\Delta'(s_{min})} \exp(s_{min} \cdot t), \quad s_{min} < 0, \quad t \ge T.$$

Значення кореня s_{min} можна визначити аналітично, користуючись, наприклад, методикою, поданою в [5]. Там же можна знайти формули для приблизного визначення шуканого T.

На практиці приблизне значення найменшого кореня легко знайти, виконуючи програмно простий перебір з невеликим кроком змінної s поліному δ(s) у від'ємній півплощині до моменту зміни його знаку. Тому, записавши приблизне співвідношення $\frac{\Delta_i(s_{min})}{\Delta'(s_{min})} \exp(s_{min} \cdot t) = \varepsilon$, одержимо оцінку часу T :

$$T = \frac{1}{s_{min}} (\ln \varepsilon - \ln \frac{\Delta_i(s_{min})}{\Delta'(s_{min})}). \qquad (9)$$

Така оцінка, зрозуміло, є достатньо приблизною, та суттєво залежить від розташування коренів характеристичного поліному. Втім вона дозволяє орієнтуватися у можливому часі згасання перехідних процесів.

Для виконання дослідження процесу функціонування ланцюга у повному обсязі треба знайти корені поліному δ(s), оскільки один нульовий корінь відомий одразу, враховуючи особливості форми характеристичного поліному (6). З урахуванням (6) імовірності $p_i(t)$, як функції часу, мають вигляд:

$$p_i(t) = \frac{\Delta_i(0)}{\delta(0)} 1(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Delta_i(s_k)}{\Delta(s_k)} \exp(s_k t). \qquad (10)$$

Подальше дослідження ланцюга полягає в аналізі співвідношень (10).

Одержані у статті співвідношення можуть бути використані під час підготовки та обґрунтування рішень у випадках, коли при моделюванні бойових дій виникає необхідність дослідити операції, розвиток яких у часі супроводжується наявністю випадкових факторів.

Висновки й перспективи подальших досліджень

Таким чином, в статті запропоновані прийоми аналізу безперервних ланцюгів Маркова на основі використання перетворення Лапласу. Прийоми дозволяють проводити аналіз низки практичних питань функціонування систем, в яких відбуваються марковські випадкові процеси.

Література

1. Араманович И.Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. / И.Г. Араманович, Г.Л. Лунц, Л.Э. Эльсгольц – М.: Наука, ГРФМЛ, 1965 – 391с. **2. Вентцель Е.С.** Исследование операций. – М.: Сов. радио, 1972 – 551с. **3. Демидович Б.П.** Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович , И.А. Марон – М.: Наука, ГРФМЛ, 1970 – 664с. **4. Курош А.Г.** Курс высшей математики. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1965 – 431с. **5. Фельдбаум А.А.** Электрические системы автоматического регулирования. – М.: Оборонгиз, 1957 – 807с.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

Эдуард Александрович Кузьмин ***(канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры)***
Владимир Николаевич Лукъянчук ***(канд. воен. наук, доцент, доцент кафедры)***

Национальный университет обороны Украины имени Ивана Черняховского, Киев

В статье предложены приемы анализа однородных цепей Маркова с дискретными состояниями, в основе которых лежит преобразование Лапласа. Переход к системе алгебраических уравнений позволяет выполнить анализ цепи с использованием стандартного программного обеспечения компьютера. Представлены правила определения коэффициентов характеристического полинома, которые позволяют программировать его расчет. Определение корней характеристического уравнения позволяет подойти к исследованию цепи как динамической системы.

Ключевые слова: *уравнения Колмогорова, преобразование Лапласа, вероятность состояния цепи, определитель.*

PRACTICAL ANALYSIS METHODS OF MARKOV CONTINUOUS CHAINS

Eduard Kuzmin ***(Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of a Department)***
Volodymyr Lukianchuk ***(Candidate of Military Sciences, Associate Professor, Associate Professor of a Department)***

National Defence University of Ukraine named after Ivan Cherniakhovsky, Kyiv

The article offers the methods of Markov homogeneous chains with a discrete state, analysis which are based on Laplace transformation. Transition to a system of algebraic equations enables analysis of the chain with the use of standard computer software. The rules for determining of coefficients of the characteristic polynomial are presented, which allow programming of its calculation. Determination of the roots of the characteristic equation allows to approach the study of the chain as a dynamic system.

Key words: *the equations of Kolmogorov, Laplace transformation, the probability of chain state, determinant.*