

Володимир Іванович Грабчак (канд. техн. наук, с.н.с., начальник наукового центру)

Юрій Миколайович Косовцов (канд. фіз.-мат. наук, інженер кафедри)

Семен Володимирович Бондаренко (старший науковий співробітник)

Академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів

АПРОКСИМАЦІЯ СИЛИ ОПОРУ ПОВІТРЯ РУХУ СНАРЯДІВ АНАЛІТИЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ

В статті проводиться вибір та обґрунтування аналітичних функцій, які використовуються для опису сили опору повітря. Розглядаються характерні ділянки та особливості зміни функцій опору повітря в залежності від швидкості польоту снаряда, обґрунтовується набір апроксимуючих функцій, які з достатньою точністю відтворювали б характер їх змін. Запропоновано в якості апроксимуючих функцій використовувати функцію помилок та функцію Гауса. Показано, що зміна параметрів апроксимуючих функцій дозволяє на заданому відрізку наблизити їх криву до потрібного значення сили опору повітря.

Ключові слова: сила опору повітря, сила лобового опору, апроксимація (наближення) функцій, функція помилок, Гауссова функція.

Вступ

Постановка проблеми в загальному вигляді та аналіз літератури. Існуючі підходи, щодо розрахунку аеродинамічних характеристик, охоплюють весь спектр від натурних випробувань (метод стрільб), випробувань моделей снарядів в аеродинамічних трубах до кінцево-різницевого схем чисельного рішення рівнянь з частковими похідним [1-4]. Основним недоліком експериментальних підходів є недостатня точність та значна їх затратність, необхідність використання значної кількості вимірювальних засобів та іншого устаткування; математичних (чисельних) методів – складність рішення завдання руху снарядів, особливо складної форми, в'язкого теплопровідного неоднорідного газу, яке без суттєвих спрощень і допущень не вирішується, при цьому похибки розрахунків можуть суттєво впливати на точність розрахунку Таблиць стрільби [1, 3-6].

Подальшим напрямком досліджень визначення аеродинамічної сили, є підхід який базується на апроксимації її функціями, які можливо описати аналітичними виразами [7, 8].

Аналітичні апроксимації, які дають задовільні результати нечисленні, до них відноситься відома формула Сіаччі, що відтворює значення сили лобового опору повітря для снарядів старої форми (загальна довжина в середньому 2-3 калібру, висота головної частини порядку 1 калібру з радіусом оживала порядку 1,5 калібру). Існують і інші, менш відомі формули [7]. Для більш сучасних снарядів відсутні формули, подібні формулі Сіаччі. Однією з основних причин цього є вкрай висока чутливість форми кривої Сіаччі від значень параметрів, що входять в його формулу.

Існують підходи, пов'язані з апроксимацією функцій опору поліномами [8, 9], однак вони не отримали широкого розповсюдження.

Крім того, функції сили опору повітря, які використовуються для розрахунку Таблиць

стрільби, визначаються не для конкретного снаряда, а як правило для групи снарядів, так звані усереднені (еталонні) функції [7, 8].

Перспективним напрямком визначення аеродинамічної сили є апроксимація її функціями, які можливо описати аналітичними виразами на основі отриманих експериментальних даних практичних стрільб [6].

Метою статті є вибір та обґрунтування набору аналітичних функцій, які можна використовувати для апроксимації (наближення) функцій сили опору повітря для конкретного снаряда.

Основна частина

Задачу апроксимації (наближення), будемо інтерпретувати, як задачу оптимального відновлення функції за умови отримання неповної інформації [10, 11].

Розглянемо основні положення, які лежать в основі рішення цієї задачі.

Нехай X – нормований простір заданих на визначеному інтервалі неперервних функцій

$$F(v) = \{F_1(v), \dots, F_n(v)\} \quad (1)$$

де $F_i(v)$ – компоненти функції опору повітря,

v – швидкість польоту снаряда.

Набір

$$T = \{T_1(\chi, F(v)), \dots, T_m(\chi, F(v))\} \quad (2)$$

заданих функціоналів, зіставляє функції $F(v) \in X$ вектор T , де χ – зовнішні параметри задачі.

Задачу відновлення функції по заданому вектору (2) сформулюємо наступним чином: потрібно знайти функції

$$g(v) = \{g_1(v), \dots, g_n(v)\} \quad (3)$$

де $g(v) \in X$, такі щоб виконувалась умова

$$\|F(v) - g(v)\| \leq \varepsilon \quad (4)$$

де ε – довільне наперед задане число; $\|\cdot\|$ – норма.

При коректно поставленій та стійкій задачі [12, 13], для неперервних функціоналів (2), умова (4)

еквівалентна, наступній умові

$$\left\| \frac{T - T^g}{T} \right\| \leq \eta \quad (5)$$

де $T^g = \{T_1(\chi, g(v)), \dots, T_m(\chi, g(v))\}$; η – довільне наперед задане число.

Таким чином, апроксимуюча функція (набір функцій опору повітря) $g(v)$ обчислюється по розузгодженню заданих експериментальних даних – вектор T (опорні дальності, час, максимальні висоти польоту снаряда та інші) та вектора T^g , який визначається на основі рішення системи диференціальних рівнянь, які описують просторовий рух снаряду в повітрі [8], з функціями $g(v)$ в якості параметрів системи рівнянь.

В подальшому будемо вважати, що основним джерелом експериментально отриманої інформації є результати балістичної стрільби артилерійських систем, а саме дискретний набір значень опорної дальності, яка вимірюється на підставі визначення точок падіння (розривів) снарядів в залежності від початкової швидкості (номеру заряду) і кута кидання снаряда.

В основі наближення функцій дійсних змінних лежить теорема Вейерштрасса, яка відповідно до постановки наукового завдання – апроксимації сили опору повітря дає підґрунтя, щодо можливості опису її аналітичними функціями (виразами) [14]. Сформулюємо її наступним чином: для будь-якої неперервної на відрізку $[a, b]$ функції $F_i(v)$ існує послідовність звичайних поліномів $\{P_n(v)\}$, які рівномірно сходяться на відрізку $[a, b]$ до $F_i(v)$, тобто для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться поліном $P_n(v)$, який залежить від ε , такий, що

$$\|F_i(v) - P_n(v)\| < \varepsilon \quad (6)$$

де ε – довільне наперед задане число.

Таким чином, неперервну на відрізку $[a, b]$ функцію $F_i(v)$ можна рівномірно на цьому відрізку наблизити поліномом з наперед заданою точністю.

Це конструктивна властивість неперервних функцій притаманна всім функціям багатьох змінних, які неперервні в замкнутій обмеженій області X даного багатомірного простору [10].

Замітимо, що відповідно до [10, 14], поліноми (6) можна замінити функціями більш загальної природи, зберігаючи при цьому твердження про можливість рівномірного наближення такими функціями будь-якої неперервної функції $F_i(v)$.

З іншого боку довільна неперервна функція допускає подання за допомогою δ -функцій [15]

$$F_j(v) = \int_a^b F(v_0) \delta_j(v - v_0) dv_0 \quad (7)$$

де інтегралом добутку δ -функції $\delta(v - v_0)$ на функцію $F(v)$, будемо розуміти межу

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_a^b F(v_0) \delta_j(v - v_0) dv_0 \quad (8)$$

де $\{\delta_j(v - v_0)\}$ – будь-яка δ -послідовність, яка визначає δ -функцію $\delta(v - v_0)$.

Для межі (8) справедлива формула

$$\int_a^b F(v_0) \delta(v - v_0) dv_0 = \begin{cases} F(v), & \text{якщо } v \in (a, b), \\ 0, & \text{якщо } v \notin [a, b]. \end{cases} \quad (9)$$

Класичним прикладом δ -послідовностей є Гауссові функції, які пропонується використовувати замість апроксимуючих поліномів (6):

$$p_n(v) = \frac{1}{\sigma_j \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(v-v_0)^2}{2\sigma_j^2}} \quad (10)$$

з $\lim_{j \rightarrow \infty} \sigma_j = 0$, де σ_j, v, v_0 – дійсні величини.

У відповідності до (7, 8) довільну неперервну функцію можна апроксимувати з будь-якою наперед заданою точністю виразом

$$P_n(v) = \sum_{i=1}^n a_i p_i(v) \quad (11)$$

за відповідним підбором його параметрів, де a_i – масштабні коефіцієнти.

Таким чином, викладене вище дає нам підставу стверджувати, щодо можливості апроксимації (рівномірного наближення) заданими функціями (11) будь-якої неперервної функції опору повітря.

Апроксимуючі функції будемо знаходити в просторі X , який складається з класу неперервно-диференційованих на відрізку $[a, b]$ функцій $g(v)$

$$g_n(v) = A_{n,0} + \sum_{j=1}^N p_{n,j} \quad (12)$$

де $A_{n,0} \in X$ – типова (опорна) функція опору повітря; $p_{n,j} \in X$ – деяка система неперервних функцій типу (11); n – кількість складових функцій опору повітря (сила лобового опору, підймальна сила, сила Магнуса, тощо); N – кількість “гармонік”, які накладаються на опорну функцію, з метою максимального її наближення до функції опору повітря.

Характерною особливістю функцій опору повітря є їх різка та значна зміна в інтервалі транс швидкостей (швидкостей близьких до швидкості звуку в повітрі).

Для прикладу візьмемо одну з складових функцій опору повітря – функцію сили лобового опору. На практиці зручніше розглядати не саму силу лобового опору, а її безрозмірний коефіцієнт (c_x) у проекціях на осі вибраної системи координат, графік якого (в загальному вигляді) наведений на рис. 1.

За видом графіка вибираємо на ньому характерні ділянки та опишемо їх характерні особливості:

при малих швидкостях коефіцієнт сили лобового опору має постійне значення, що відповідає квадратичній залежності сили лобового опору від швидкості (ділянка I); у відносно вузькому інтервалі швидкостей

($0.7 < M < 0.9$) відбувається різке збільшення коефіцієнту сили лобового опору; при швидкостях снаряда близьких до швидкості звуку, настає область стабілізації, де коефіцієнт лобового опору повітря порівняно повільно змінюється в області максимуму (ділянка II);

при подальшому збільшенні швидкості коефіцієнт сили лобового опору відносно плавно спадає (ділянка III).

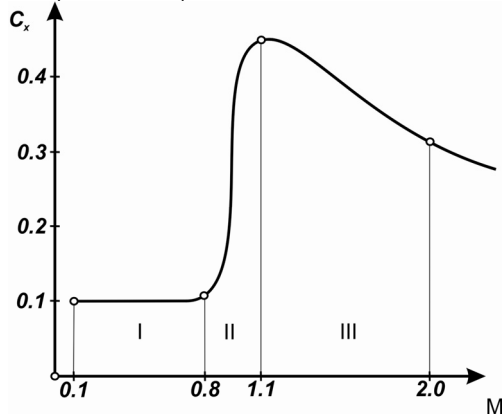


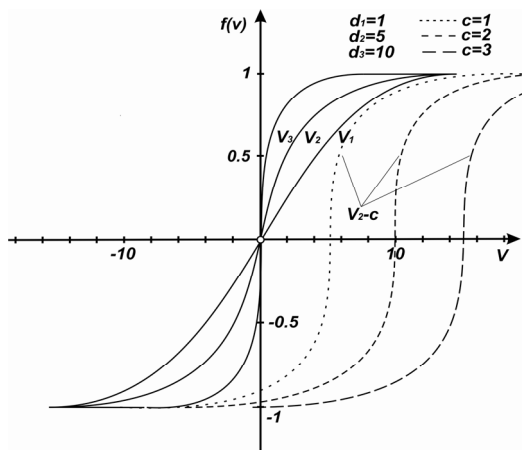
Рис.1. Графік залежності $c_x = f(M)$

Кожну характерну ділянку графіка залежності $c_x = f(M)$, можливо апроксимувати (наблизити) відповідними функціями, які з достатньою точністю відтворили б характер їх зміни.

В якості типової (опорної) функції опору повітря прийемо функцію помилок – спеціальну функцію [15], яка визначається виразом

$$\text{erf}(v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^v e^{-t^2} dt \quad (13)$$

Властивості функції (13), які в основних рисах



функція A_0

Рис. 2. Графіки опорної функції

В якості основного набору апроксимуючих функцій $\sum_{i=1}^N p_{n,j}$, які корегують нульове наближення, виберемо функцію Гауса (10) (нормальну криву).

Властивості функції:

відображають характер графіка залежності $c_x = f(M)$:

функція помилок непарна

$$\text{erf}(-v) = -\text{erf}(v);$$

функція помилок на нескінченності дорівнює одиниці;

похідна функції помилок визначається безпосередньо з визначення функції

$$\frac{d}{dv} \text{erf}(v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-v^2};$$

з точністю до масштабу і зсуву, функція помилок співпадає з нормальним інтегральним розподілом $\Phi(v)$

$$\Phi(v) = \frac{1}{2} \left(1 + \text{erf} \frac{v}{\sqrt{2}} \right).$$

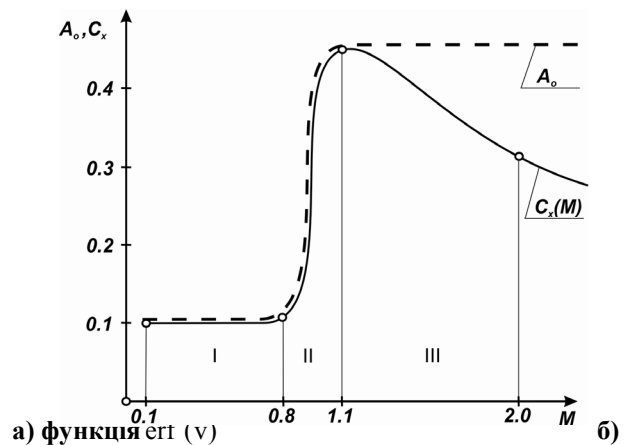
На базі функції помилок можна побудувати нульове наближення функції опору повітря, яке враховує різку їх зміну в інтервалі транс швидкостей польоту снаряда.

Змінюючи верхню межу інтегрування функції помилок (13), можна переміщувати криву відносно початку координат по осі Ov та змінювати її масштаб та пологість, що дозволяє на заданому відрізку задати опорну криву та наблизити її до потрібного значення сили лобового опору повітря (рис. 2 а).

Наприклад функція

$$A_0 = a_0 + b_0 \text{erf}[k_0(v - \mu_0)] \quad (14)$$

де a_0, b_0, k_0, μ_0 – числові параметри (масштабні коефіцієнти), при визначеному виборі яких, функція A_0 має вид кривої якісно співпадаючої в областях I та II з кривою функції сили лобового опору повітря (рис. 2 б)



а) функція $\text{erf}(v)$

б)

функція визначена на всій множині дійсних значень v ;

при всіх значеннях v приймає додатні значення, тобто нормальна крива розташована над віссю Ov (рис. 3);

межа функції при необмеженому зростанні v (за абсолютною величиною) дорівнює нулю:

$\lim_{|v| \rightarrow \infty} p_n(v) = 0$, тобто вісь Ov служить горизонтальною асимптотою графіка; при $v = \mu$ функція

$$p(v) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(v-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

має максимум, який дорівнює $\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}$;

різниця $v - \mu$ входить в аналітичний вираз функції в квадраті, тобто графік функції симетричний відносно прямої $v = \mu$.

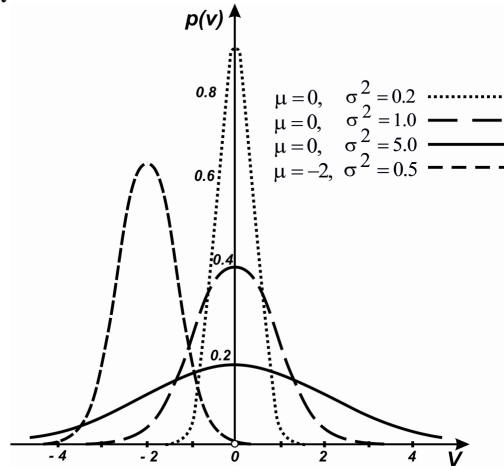


Рис. 3. Графік функції Гаусса $p(v)$

Графік функції Гаусса є характерною симетричною кривою у формі дзвону, з шириною порядку σ , що швидко спадає на нескінченності.

Відповідно, зміна значення параметрів μ та σ

виразу (10) призводить до зсуву кривої вздовж вісі та змінює її пологість (гостро вершинність).

Таким чином, вираз (14) з урахуванням апроксимуючої функції (10), набуде вигляду

$$g_{1,0}(v) = a_0 + b_0 \operatorname{erf} [k_0(v - \mu_0)] + c_1 \exp \left[-\frac{(v - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2} \right] \quad (15)$$

де остання складова при визначеному виборі числових параметрів c_1, σ_1, μ_1 дозволяє більш

точно наблизити форму кривої в області III з кривою функції сили лобового опору повітря (рис. 4)

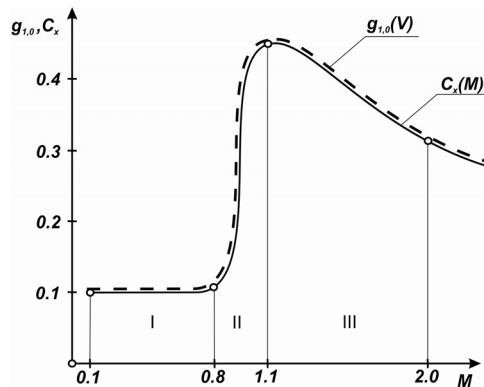


Рис. 4. Графік функції $g_{1,0}(v)$

Таким чином, в загальному вигляді функцію (12) з урахуванням (10, 13) надамо як

$$g_{n,j}(v) = a_0 + b_0 \operatorname{erf} [k_0(v - \mu_0)] + \sum_{j=1}^N c_j \exp \left[-\frac{(v - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2} \right] \quad (16)$$

Запропонований підхід до апроксимації функцій опору повітря руху конкретного снаряда зводиться до послідовного підбору числових

параметрів виразу (16) так, щоб задовольнити умові (5) з наперед заданою точністю η , яка залежить від точності складання Таблиць стрільби.

Висновки

Перспективним напрямком визначення характеристик аеродинамічної сили є напівемпіричний підхід, який заснований на апроксимація її функціями, які можливо описати аналітичними виразами на основі отриманих

експериментальних даних практичних стрільб, що не вимагає значного устаткування і вирішується за допомогою використання ЕОМ.

В статті проведений вибір та обґрунтування аналітичних функцій, які можливо використовувати для опису сили опору повітря. В якості апроксимуючих функцій запропоновано використовувати функцію помилок та функцію Гауса, які:

- якісно відображають характерні ділянки експериментальної кривої;
- задовольняють умові безперервності та гладкості;

кількісно є мінімальними із зрозумілим, в математичному сенсі, змістом вхідних параметрів; дозволяють варіації кривої в заданій ділянці швидкостей польоту снаряда, без істотної їх зміни на ділянках, що примикають;

забезпечують єдиний підхід до можливості апроксимації якісно різних аеродинамічних характеристик.

Подальшим напрямком досліджень є розробка алгоритмів практичного застосування апроксимуючих функцій для опису сили опору повітря.

Література

1. Аржаников Н.С. Аэродинамика летательных аппаратов / Н.С. Аржаников, Г.С. Садекова. – М.: Высшая школа, 1983. – 359 с. 2. Хемш М. Аэродинамика ракет / М. Хемш, Дж. Нилсен. В 2-кн. Кн. 2. Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 512 с. 3. Шевелев Ю.Д. Пространственные задачи вычислительной аэрогидродинамики / Ю.Д. Шевелев. – М.: Наука, 1986. – 368 с. 4. Липницкий Ю.М. Аэродинамика баллистического полета / Ю.М. Липницкий, А.В. Красильников, А.Н. Покровский, В.Н. Шманенков [Под ред. Липницкого Ю.М.]. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 176 с. 5. Харитонов А.М. Техника и методы аэрофизического эксперимента. Ч.1. Аэродинамические трубы и газодинамические установки. / А.М. Харитонов. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005. – 220 с. 6. Грабчак В.І. Аналіз існуючих та перспективних методів визначення сили опору повітря руху снарядів / В.І. Грабчак, С.В. Бондаренко. – Військово-технічний збірник. – Львів: АСВ. – 2013. – Вип. 2. (9). – С. 13-19. 7. Равдин И.Ф. Внешняя баллистика неуправляемых реактивных снарядов / И.Ф. Равдин. – Л.: ВВА, 1972. – 184 с. 8. Дмитриевский А.А. Внешняя баллистика /

А.А. Дмитриевский, Л.Н. Лисенко. – М.: Машиностроение, 2005. – 607 с. 9. Грабчак В.І. Апроксимація функції аеродинамічних коефіцієнтів сили опору повітря методом найменших квадратів / В.І. Грабчак. – Львів: АСВ. – 2012. – Вип. 2 (7). – С. 20-24. 10. Ибрагимов И.И. Теория приближения целыми функциями / И.И. Ибрагимов. – Баку: ЭЛМ, 1979. – 377 с. 11. Корнейчук Н.П. Аппроксимация с ограничениями / Корнейчук Н.П., Лигун А.А., Доронин В.Г. – Киев: Наукова думка, 1982. – 252 с. 12. Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с. 13. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции / В.Я. Арсенин. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1984. – 384 с. 14. Дубовик В.П. Вища математика / В.П. Дубовик, І.І. Юрик. – Київ: А.С.К., 2006. – 648 с. 15. Абромовиц М. Справочник по специальным функциям / [Под ред. Абромовица М., Стигана И.]. – М.: Наука, 1979. – 832 с. 16. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей / Б.В. Гнеденко. – М.: Наука. – 1988. – 448 с.

АППРОКСИМАЦІЯ СИЛИ СОПРОТИВЛЕННЯ ВОЗДУХА ДВИЖЕННЮ СНАРЯДОВ АНАЛІТИЧЕСКИМИ ФУНКЦІЯМИ

Владимир Иванович Грабчак (канд. техн. наук, с.н.с., начальник научного центра)

Юрий Николаевич Косовцов (канд. физ.-мат. наук, инженер кафедры)

Семён Владимирович Бондаренко (старший научный сотрудник)

Академия сухопутных войск имени гетьмана Петра Сагайдачного, Львов

В статье проводится выбор и обоснование аналитических функций, которые используются для описания силы сопротивления воздуха. Рассматриваются характерные участки и особенности изменения функций сопротивления воздуха в зависимости от скорости полета снаряда, обосновывается набор аппроксимирующих функций, которые с достаточной точностью воспроизводили бы характер их изменений. Предложено в качестве аппроксимирующих функций использовать функцию ошибок и функцию Гауса. Показано, что изменение определенных характеристик аппроксимирующих функций позволяет на заданном отрезке приблизить значения их кривых к заданному значению силы сопротивления воздуха.

Ключевые слова: сила сопротивления воздуха, сила лобового сопротивления, аппроксимация (приближение) функций, функция ошибок, Гауссова функция.

APPROXIMATION OF AIR RESISTANCE FOR PROJECTILE MOVEMENT BY ANALYTICAL FUNCTIONS

Volodymyr Grabchac (Candidate of Technical Sciences, Senior Research Fellow, Chief of a Research Center)

Yuri Kosovcov (Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Engineer of a Department)

Semen Bondarenko (Senior Research Fellow of a Research Section)

Army Academy named after Hetman Petro Sahaidachnyi, Lviv

The article provides selection and grounding for analytical functions, which are used for description of air resistance. Characteristic aspects and peculiarities of changes in functions of air resistance depending on the speed of projectile movement are considered, set of approximating functions which would display the character of these changes with sufficient accuracy is grounded. It is suggested to employ the function of errors and Gaussian function as approximating functions. It is shown that change of defined parameters of approximating functions allows to approximate the values of their curves on the given distance to the given air resistance value.

Key words: air resistance, drag force, function approximation, error function, Gaussian function.