УДК: 519.622: 521.182 DOI: **10.33099/2311-7249/2026-55-1-118-125**

***РАКУШЕВ Михайло Юрійович*,**
доктор технічних наук, старший науковий співробітник,
Національний університет оборони України, Київ, Україна,
https://orcid.org/0000-0002-7703-3287

***ЗОТОВ Сергій Валентинович*,**
кандидат військових наук,
Національний університет оборони України, Київ, Україна,
https://orcid.org/0000-0001-8023-6598

***КОШЛАНЬ Олександр Анатолійович*,**
доктор філософії, старший дослідник,
Національний університет оборони України, Київ, Україна,
https://orcid.org/0000-0001-9678-6463

МОДЕЛЮВАННЯ СТАБІЛІЗОВАНИХ РІВНЯНЬ РУХУ КОСМІЧНИХ АПАРАТІВ У ГРИНВІЦЬКІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ НА ОСНОВІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

***Мета статті*.** *На основі диференціально-тейлорівських перетворень розробити числово-аналітичну обчислювальну схему інтегрування стабілізованих за енергією методом Баумгарта диференціальних рівнянь руху космічних апаратів у Гринвіцькій прямокутній системі координат.*

Методи дослідження. *Під час написання статті запропоновано числово-аналітичну обчислювальну схему прогнозування руху космічних апаратів ближнього космосу у Гринвіцькій прямокутній системі координат, яка розроблена на основі диференціально-тейлорівських перетворень. Прогнозування проводиться шляхом інтегрування стабілізованого диференціального рівняння збуреного руху космічного апарату. В моделі руху космічного апарата враховані збурення від геопотенціалу Землі та опору атмосфери. Стабілізація здійснюється за енергією космічного апарата методом Баумгарта. Інтегрування проводиться методом диференціально-тейлорівських перетворень.*

Отримані результати досліджень. *На основі методу диференціально-тейлорівського перетворення, враховуючи властивості зазначеного математичного апарату, запропоновано обчислювальну схему – типовий алгоритм прогнозування стабілізованого руху космічного апарату. Розглянуто обчислювальні схеми інтегрування з постійним кроком і порядком, а також адаптивні обчислювальні схеми за: кроком інтегрування, кроком інтегрування та порядком. Для адаптивних схем наведено результати прогнозування руху космічного апарату за критерієм «точність-обчислювальна складність» для заданої відносної похибки інтегрування за фазовими змінними інтегрування (координатами у Гринвіцькій прямокутній системі координат).*

Елементи наукової новизни. *У статті запропоновано чисельно-аналітичну обчислювальну схему інтегрування енергетично стабілізованого диференціального рівняння руху космічного апарату методом Баумгарта в Гринвіцькій прямокутній системі координат, яка розроблена на основі диференціально-тейлорівських перетворень. Використання стабілізації та диференціально-тейлорівських перетворень дає змогу підвищити ефективність прогнозування руху космічних апаратів ближнього космосу.*

Теоретичне та практичне значення викладеного у статті. *Наведено результати математичного моделювання для прогнозування руху космічних апаратів ближнього космосу. За результатами моделювання визначено рекомендації щодо застосування розроблених підходів для прогнозування руху космічних апаратів. У цілому, використання стабілізації дає змогу підвищити ефективність прогнозування руху космічних апаратів ближнього космосу за критерієм «точність-обчислювальна складність» до 35%.*

Ключові слова: *моделювання, диференціально-тейлорівські перетворення, метод Баумгарта, космічний апарат, інтегрування.*

Вступ

Постановка проблеми. Процедура прогнозування руху космічних апаратів (далі – КА) є невід’ємною складовою програмних комплексів, які призначені для виконання завдань, пов’язаних з орбітальним польотом КА. Характеристики такої процедури визначаються: видом диференціального рівняння руху КА та обраним методом його розв’язування. Для високоточного прогнозування руху КА при врахуванні усіх “часткових збурень”, основними є числові методи інтегрування звичайних диференціальних рівнянь, які дозволяють без «штучного» введення спрощень у правій частині вихідних диференціальних рівнянь отримати рішення завдання прогнозування руху КА [1–4].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Числове інтегрування диференціальних рівнянь руху КА неминуче пов'язане, окрім підвищених обчислюваних витрат, що характеризує усі числові методи, з наступними складнощами. Праві частини диференціальних рівнянь, які описують орбітальний руху КА являють собою швидкозмінні функції, які необхідно інтегрувати з малим кроком. Це призводить до збільшення обсягу обчислень, що спричиняє швидке накопичення похибок округлення. Крім того, рівняння руху КА є нестійкими за Ляпуновим, що додатково створює сприятливі умови для підсилення різноманітних похибок, які супроводжують процес прогнозування, у тому числі зазначених раніше числових похибок округлення. Так, похибки на поточному кроці інтегрування становлять похибки початкових даних наступного кроку, які у подальшому підсилюються через нестійкість крок за кроком. Тому, за числового інтегрування для боротьби з Ляпуновською нестійкістю перевагу віддають стійким рівнянням. Одним із простих, але потужних методів «штучної» стабілізації для задачі прогнозування руху КА є метод Баумгарта. Зазначений метод заснований на введенні в диференціальні рівняння руху КА стабілізуючих членів, які компенсують відхилення числового рішення від деякої опорної інтегральної поверхні. Незважаючи на те, що після стабілізації рівняння стають складніше та потребують більшого обсягу обчислень, вони, для деяких задач прогнозування руху КА дозволяють досягти зменшення обчислювальної складності (підвищити оперативність) інтегрування, так як стабілізація дозволяє збільшити крок інтегрування, зберігаючи при цьому точність числового рішення [1; 5].

Одним з перспективних підходів для розробки числових методів інтегрування диференціальних рівнянь руху КА є використання математичного апарату диференціально-тейлорівських (далі – ДТ) перетворень [6; 7]. На основі даного математичного апарата розроблено низку обчислювальних схем прогнозування руху КА, у тому числі адаптивних за кроком та (чи) порядком інтегрування [8–10]. Однак, для інтегрування стабілізованих диференціальних рівнянь руху КА зазначений метод не застосовувався.

Метою статті є розроблення числово-аналітичної обчислювальної схеми інтегрування стабілізованих за енергією методом Баумгарта диференціальних рівнянь руху космічних апаратів у Гринвіцькій прямокутній системі координат, яка розроблена на основі диференціально-тейлорівських перетворень.

Виклад основного матеріалу дослідження

Метод Баумгарта реалізує числову стабілізацію розв'язку заданого диференціального рівняння та передбачає введення в останнє спеціальних «стабілізуючих» членів. Зазначені члени визначаються з відомих інтегралів, які містять додаткову (апріорну) інформацію про рішення та розглядаються як необхідні умови, що висуваються до рішення. З усіх можливих інтегральних співвідношень, для задачі орбітального польоту КА окремо виділяють енергетичні, так як саме стабілізація за енергією найкращим чином допомагає у боротьбі з Ляпуновською нестійкістю.

У самому загальному вигляді метод Баумгарта для стабілізації за енергією диференціального рівняння руху КА у Гринвіцькій прямокутній системі координат (далі – ГСК) має такий вигляд [1]:

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = u(q,t) + g(q,t) - \gamma \Delta c \frac{\partial c}{\partial q}\left(\frac{\partial c}{\partial q}\right)^{-2} \\ \frac{dc_*}{dt} = \left(\frac{\partial c}{\partial q} g(q,t)\right), \quad \Delta c = c(q) - c_* \end{cases}, \tag{1}$$

з урахуванням початкових умов:

$$q_0 = q(t_0),\ c_{*0} = c(q_0), \tag{2}$$

де $q = (x, y, z, v_x, v_y, v_z)^T$ - вектор фазових координат (положення та швидкість) КА;

t - час (незалежна змінна диференціального рівняння);

$u(q,t)$, $g(q,t)$ – члени, що визначають прискорення від узагальнено-потенціальних та непотенціальних сил;

c, c_* - механічна енергія поступального руху (далі механічна енергія) КА та її опорне значення;

γ – стабілізуючий параметр, який обирається дослідним шляхом (γ ≠ 0).

Повна механічна енергія КА в (неінерціальній) ГСК (при врахуванні узагальнено-потенціальних сил) має вигляд [3]:

$$c = c(q) = \frac{v^2}{2} - U_n(r) - \frac{1}{2}(\Omega_0 \times r)^2 \Rightarrow c(q) = \frac{v^2}{2} - U_n(r) - \frac{1}{2}\Omega_0^2(x^2 + y^2), \tag{3}$$

де $U_n(r)$ – потенціал земного притягання (геопотенціал) у ГСК;

$r = (x, y, z)^T$, $v = (v_x, v_y, v_z)^T$ - вектори положення та швидкості КА у ГСК;

Ω_0 – кутова швидкість обертання Землі навколо власної вісі.

Особливістю системи (1) є те, що вона є асимптотично стійкою за обраною інтегральною поверхнею – механічною енергією КА c, тобто $\Delta c \to 0$ при $t \to \infty$ для будь-яких q. Зазначена властивість диференціальних рівнянь (1) є суттєвою при числовому інтегруванні, так як вона дозволяє утримувати числове рішення (на яке істотно впливають різноманітні похибки) навколо інтегральної поверхні, враховуючи при цьому топологічні властивості точного рішення. Для порівняння, числове інтегрування нестабілізованого диференціального рівняння супроводжується дрейфом похибки від інтегральної поверхні.

Розглянемо сили (прискорення) $u(q,t), g(q,t)$, наведені в (1). Для прогнозування руху КА в ГСК узагальнено-потенціальні сили) $u(q,t)$ визначають: прискорення від притягання Землі (врахування геопотенціалу), відцентрове прискорення та прискорення Коріоліса. Решта сил відноситься до непотенціальних сил $g(q,t)$, а саме: аеродинамічний опір атмосфери, притягання Місяця та Сонця, тиск сонячного світла тощо. Без втрати узагальненості подальших викладок, запишемо вищезазначені сили (прискорення) які враховуються при прогнозуванні руху КА ближнього космосу, а саме (з непотенціальних сил врахуємо тільки гальмівний вплив атмосфери).

$$u(q,t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{\partial U_n}{\partial x} + \Omega_0^2 x + 2\Omega_0 v_y \\ \frac{\partial U_n}{\partial y} + \Omega_0^2 y + 2\Omega_0 v_x \\ \frac{\partial U_n}{\partial z} \end{pmatrix}, \qquad g(q,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -S_b \rho_{atm} v_{ka} v_x \\ -S_b \rho_{atm} v_{ka} v_y \\ -S_b \rho_{atm} v_{ka} v_z \end{pmatrix}, \tag{4}$$

де S_b, ρ_{atm} – балістичний коефіцієнт КА та густина повітря відповідно;

v_{ka} – модуль швидкості КА у ГСК.

За врахування в моделі руху КА сил (прискорень), наведених у (4) та для енергії КА, наведених у (3) стабілізуючі члени в (1) мають вигляд:

$$\frac{\partial c}{\partial q} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial U_n}{\partial x} - \Omega_0^2 x \\ -\frac{\partial U_n}{\partial y} - \Omega_0^2 y \\ -\frac{\partial U_n}{\partial z} \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\frac{\partial c}{\partial q}\right)^2 = \left(\frac{\partial U_n}{\partial x} + \Omega_0^2 x\right)^2 + \left(\frac{\partial U_n}{\partial y} + \Omega_0^2 y\right)^2 + \left(\frac{\partial U_n}{\partial z}\right)^2 + v_{ka}^2, \tag{5}$$

$$\frac{dc_*}{dt} = \left(\frac{\partial c}{\partial q} g(q,t)\right) \Rightarrow \frac{dc_*}{dt} = -S_b \rho_{atm} v_{ka} \left({v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2\right) \Rightarrow \frac{dc_*}{dt} = -S_b \rho_{atm} v_{ka}^3. \tag{6}$$

Вираз (6) в диференціальній формі визначає роботу непотенціальних сил, що діють на КА та змінюють його механічну енергію (для обраної моделі руху КА це сила аеродинамічного гальмування яка зменшує механічну енергію КА):

$$dc_* = -S_b \rho_{atm} v_{ka}^3 dt \Rightarrow c_*(t) = -S_b \int_{t_0}^{t} \rho_{atm} v_{ka}^3 d\tau, \tag{7}$$

де τ – параметр, що має розмірність часу.

Отже, використовуючи залежності (3)–(6), можна повністю задати стабілізовану методом Баумгарта за енергією диференціальне рівняння руху КА у ГСК.

Інтегрування стабілізованого диференціального рівняння проведемо на основі математичного апарату ДТ-перетворень академіка НАН України Г.Є. Пухова [6]. ДТ-перетвореннями називають функціональні перетворення вигляду [6–8]:

$$Z(k) = P\{z(t)\} = \frac{h^k}{k!} \frac{\partial^k z(t)}{\partial t^k}\bigg|_{t=t_*} = \frac{h^k}{k!} \frac{\partial^k z(t_*)}{\partial t^k}, \tag{9}$$

$$z(t) = P^{-1}\{Z(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_*)^k}{h^k} Z(k), \tag{10}$$

де $P\{\ \}, P^{-1}\{\ \}$ - пряме та обернене ДТ-перетворення;

$z(t)$ – скалярна функція, яка диференційована необхідну кількість разів (має похідні необхідного порядку) за t;

t – скалярний аргумент, за яким проводиться перетворення;

t_* – значення аргументу, при якому проводиться перетворення;

h – відрізок аргументу, на якому функція $z(t)$ подається рядом Тейлора за t;

t – цілочисловий аргумент 0, 1,…;

$Z(k)$ – дискретна функція за аргументом t.

Вираз (9) визначає пряме перетворення, що дає змогу за оригіналом $z(t)$ знайти ДТ-зображення $Z(k)$. Вираз (10) визначає обернене перетворення, що відновлює оригінал $z(t)$ у вигляді ряду Тейлора. Множину значень $Z(k)$ прийнято називати ДТ-спектром, а значення функції $Z(k)$ при конкретних значеннях аргументу k – дискретами ДТ-спектру або Т-дискретами, наведену в табл. 1.

Таблиця 1

Відповідність оригіналів та зображень для диференціально-тейлорівських перетворень

№	Оригінал	Зображення (позначення та обчислення)
1.	$x(t) \pm y(t)$	$X(k) \pm Y(k)$
2.	$x(t)y(t)$	$X(k) * Y(k) = \sum_{p=0}^{k} X(k-p)Y(p)$ - алгебраїчна згортка
3.	$z(t) = \frac{x(t)}{y(t)}$	$Z(k) = \mid \frac{X(k)}{Y(k)} \mid;\ Z(k) = \frac{X(k) - \sum_{p=1}^{k} Z(k-p)Y(p)}{Y(0)}$
4.	$\sqrt{x(t)}$	$\underline{X^{1/2}}(k) = \begin{cases} \sqrt{X(0)}, & \text{при } k = 0 \\ \frac{X(k) - \sum_{p=1}^{k-1} \underline{X^{1/2}}(k-p)\underline{X^{1/2}}(p)}{2X^{1/2}(0)}, & \text{при } k > 0 \end{cases}$
5.	1	$\delta_T(k) = \begin{cases} 1, & \text{при } k = 0 \\ 0, & \text{при } k \geq 1 \end{cases}$ – тейлорівська одиниця, «теда»
6.	t	$T(k) = t_* \delta_T(k) + h\delta_T(k-1) = \begin{cases} t_*, & \text{при } k = 0 \\ h, & \text{при } k = 1 \\ 0, & \text{при } k \geq 2 \end{cases}$
7.	$const$	$const \cdot \delta_T(k)$
8.	$const\ x(t)$	$const \cdot X(k)$
10.	$exp\ x(t)$	$\underline{exp}X(k) = \begin{cases} exp\ X(0), & \text{при } k = 0 \\ \sum_{p=0}^{k} \frac{p+1}{k} X(p+1)\underline{exp}X(k-p-1), & \text{при } k \geq 1 \end{cases}$
11.	$\frac{dx}{dt}$	$DX(k) = \frac{k+1}{h} X(k+1)$

ДТ-перетворення – математичний апарат прикладного аналізу, що дозволяє розв'язувати інтегро-диференціальні задачі у числовому, аналітичному та числово-аналітичному вигляді. Однією з основних властивостей ДТ-перетворень є можливість рекурентного обчислення Т-спектра (який є коефіцієнтами ряду Тейлора) задачі, що розв'язується. При цьому такий розрахунок методично просто реалізується на основі спеціалізованої бібліотеки процедур на ЕОМ, що позбавляє від методичних труднощів проведення аналітичних операцій (взяття відповідних похідних у явному вигляді), замінюючи її на обчислювальну складність рекурентних залежностей. Зазначена властивість ДТ-перетворень значною мірою впливає на можливість і доцільність їх застосування для розв'язання інтегро-диференціальних задач.

У табл. 1 наведені основні оригінали (необхідні для інтегрування рівняння (1)) та їх зображення. Повний перелік оригіналів та їх зображень для ДТ-перетворень наведено у [6–8]. Використання ДТ-перетворень для розв'язання задач, як і для інших операційних методів, полягає у переході від складної моделі (у вигляді системи інтегро-диференціальних рівнянь) у просторі оригіналів до більш простої еквівалентної моделі (системи алгебраїчних рекурентних рівнянь) у просторі зображень, проведення необхідних операцій (визначених задачею, що розв'язується) із отриманою моделлю в просторі зображень та відновлення отриманої кінцевої моделі у простір оригіналів.

Обчислювальні схеми інтегрування звичайних диференціальних рівнянь, що отримуються з використанням ДТ-перетворень, для широкого кола практичних задач мають кращі обчислювальні характеристики за узагальненим критерієм "точність-обчислювальна складність", ніж обчислювальні схеми, отримані на основі традиційних числових методів інтегрування.

На підставі (9)–(10) запишемо ДТ-схему інтегрування стабілізованого диференціального рівняння руху КА (1), з урахуванням (3)–(6):

$$\begin{cases} T(k) = t_i\delta_T(k) + h\delta_T(k-1), \qquad Q(0) = q(t_i), \\ U(k) = P\{u(q,t)\}, \qquad G(k) = P\{g(q,t)\}, \qquad C(k) = P\{c(q)\}, \\ C_*(0) = c_*(t_i), \ \text{при } c_*(t_0) = C(0), \\ C_*(k+1) = \frac{h}{k+1} S_b P\{\rho_{atm} v_{ka}^3\}, \\ \Delta C(k) = C(k) - C_*(k)\delta_T(k), \\ C_Q(k) = P\left\{\frac{\partial c}{\partial q}\right\}, \qquad C_Q^2(k) = P\left\{\left(\frac{\partial c}{\partial q}\right)^2\right\}, \\ Q(k+1) = \frac{h}{k+1}\left(U(k) + G(k) - \gamma \mid \frac{\Delta C(k)}{C_Q^2(k)} \mid * C_Q(k)\right), \ k = 0 \ldots (k_{max}-1), \end{cases} \tag{11}$$

$$t_{i+1} = t_i + h, \qquad q(t_{i+1}) = \sum_{k=0}^{k_{max}} Q(k), \qquad c_*(t_{i+1}) = \sum_{k=0}^{k_{max}} C_*(k), \tag{12}$$

де $q(t_{i+1})$, $c_*(t_{i+1})$ - прогнозовані координати та механічна енергія КА;

h, i - крок інтегрування та вузол обчислювальної сітки;

$T(k)$, $Q(k)$, $U(k)$, $G(k)$, $C(k)$, $C_*(k)$, $C_Q(k)$, $C_Q^2(k)$, $\Delta C_*(k)$ – Т-спектри незалежного змінного диференціального рівняння t, вектора q, прискорень $u(q,t)$ та $g(q,t)$, енергій c та c_*, функції $\partial c/\partial q$ (5) та її квадрату, а також Δc відповідно;

k_{max} - порядок точності інтегрування (визначається кількістю врахованих при відновленні Т-дискрет);

$\delta_T(k)$, $*$, $|-|$ - «теда», операції множення та ділення в області Т-спектрів (табл.1);

γ – стабілізуючий параметр ($\gamma \neq 0$).

Розглянемо порядок проведення прямого ДТ-перетворення - $P\{\ \}$ (на прикладі визначення формул для Т-зображення $U(k) = P\{u(q,t)\}$), воно (методично просто) проводиться у такому порядку:

вихідні функції (наприклад, $u(q,t)$) "розділяться" на базові математичні операції (додавання, різниця, множення, ділення, тригонометричні, степеневі функції тощо), які визначають оригінали;

кожна така операція разом з оригіналами замінюється (табл. 1) на її Т-зображення.

При проведенні першого із зазначених етапів, оригіналами є "традиційні" для задачі прогнозування руху КА залежності щодо розрахунку прискорень від геопотенціалу (наприклад, рекурентний розрахунок членів ряду сферичних функцій) та щодо розрахунку густини атмосфери (наприклад, за відповідною динамічною або статичною моделлю атмосфери Землі).

Окремо слід зазначити, що у системі диференціальних рівнянь (1) формули для c, $\partial c/\partial q$, $(\partial c/\partial q)^2$ та $u(q,t)$, а також для c_* та $g(q,t)$ мають багато однакових членів. Врахування цієї особливості є обов'язковим для ефективної організації обчислень.

У підсумку, пряме перетворення (11) являє собою систему рекурентних рівнянь відносно Т-дискет для моделі (1)–(6). Із зазначеної системи послідовно визначаються значення дискет ДТ-спектру, із завданням величини цілочислового аргументу k, починаючи з $k = 0$ до $k_{max} - 1$. Обернене перетворення (12) реалізує відновлення отриманого ДТ-спектра в область оригіналів у вигляді k_{max}-ї часткової суми відрізку ряду Тейлора.

Пряме та обернене ДТ-перетворення (11)–(12) визначають явну однокрокову зі сталим кроком та порядком числово-аналітичну обчислювальну схему інтегрування стабілізованого диференціального рівняння руху КА. Дана схема дозволяє послідовно (починаючи з $i = 0$ за початкових умов (2)) провести прогнозування руху КА у ГСК.

В адаптивних за кроком та за кроком і порядком ДТ-схемах, крок h та порядок k_{max} інтегрування є змінними (в різних вузлах обчислювальної сітки i) та визначаються в залежності від заданої (необхідної) точності інтегрування. Порядок розробки таких схем розглянутий в [8; 9]. Основною властивістю адаптивних ДТ-схем є те, що адаптація в них проводиться «*a priori*» до остаточного виконання кроку (без виконання "пробних кроків"). Це обумовлює їх високу обчислювальну ефективність, оскільки практично відсутні додаткові обчислення. Для порівняння: у числових кінцево-різницевих методах така адаптація проводиться «*a posteriori*», тобто після повного виконання кроку, тому при її проведенні потрібно або перераховувати крок, або відкидати частину розрахунків, які на ньому зроблені, що призводить до суттєвого збільшення додаткових обчислень. Можливість адаптуватися «*a priori*», реалізована за рахунок числово-аналітичних властивостей математичного апарату ДТ-перетворень, які дають змогу отримати оцінку похибки апроксимації ДТ-схеми у формі аналітичної залежності від величини кроку та порядку.

Для оцінювання ефективності інтегрування на основі (11)–(12) стабілізованого за енергією диференціального рівняння руху КА у ГСК (1) проведено моделювання довгострокового прогнозування руху КА ближнього космосу. В моделі руху КА враховано геопотенціал у вигляді розкладу в ряд за сферичними функціями для поля 4×4 та статичну модель атмосфери ГОСТ-4401-64, балістичний коефіцієнт КА S_b = 0,01–0,06. Часовий інтервал прогнозування – 300–500 витків. Похибка прогнозування (числового інтегрування) – до 1–2 с проходження висхідного вузла орбіти.

Результати моделювання наведено в табл. 2, де γ – стабілізуючий параметр; k_{max} – порядок інтегрування;

h – крок інтегрування; δ_x – відносна похибка інтегрування на кроці (для адаптивних ДТ-схем є вихідним параметром); E – обчислювальний ефект від стабілізації (для однієї ДТ-схеми зменшення обчислювальних витрат на стабілізований прогноз відносно обчислювальних витрат на прогноз без стабілізації).

Окремо слід зазначити, що стабілізовані рівняння є складнішими за нестабілізовані та потребують більшого обсягу обчислень для реалізації одного кроку інтегрування, що для ДТ-схем проявляється при проведенні прямого ДТ-перетворення. При цьому з врахуванням "подібності" формул для c, $\partial c/\partial q$, $(\partial c/\partial q)^2$ та $u(q,t)$, а також для c_* та $g(q,t)$ щодо розрахунку їх однакових членів, результуюча обчислювальна складність на одному кроці інтегрування для моделей у ГСК збільшується лише на 3–7%.

За результатами моделювання доцільно зазначити, що використання стабілізованих за енергією диференціальних рівнянь руху КА у ГСК та ДТ-перетворень дає змогу проводити прогнозування руху КА ближнього космосу. Водночас, стабілізуючий параметр який вводиться вихідне диференціальне рівняння руху КА становить 10^{-5}–10^{-3}.

Таблиця 2

Прогнозування руху космічних апаратів на основі диференціально-тейлорівських перетворень

Адаптивна ДТ-схема	Не стабілізована модель			Стабілізована модель (11)-(12)				E
	δ_x	h, с	k_{max}	δ_x	γ	h, с	k_{max}	
Висота орбіти – 420-410 км, кут нахилу орбіти – 51^0								
без адаптації	–	800	12	–	10^{-5}	900	12	10%
за кроком	10^{-8}	300-700	12	10^{-7}	10^{-5}-10^{-3}	300-850	12	15%
за кроком та порядком	10^{-8}	70-990	9-18	10^{-6}	10^{-5}-10^{-3}	120-950	9-14	35%
Висота орбіти – 660 км, кут нахилу орбіти – 82^0								
без адаптації	–	800	12	–	10^{-5}-10^{-3}	900	12	10%
за кроком	10^{-8}	290-700	12	10^{-6}	10^{-4}-10^{-3}	485-990	12	28%
за кроком та порядком	10^{-8}	50-980	9-18	10^{-6}	10^{-4}-10^{-3}	110-810	8-14	34%
Висота орбіти – 690 км, кут нахилу орбіти – 98^0								
без адаптації	–	900	12	–	10^{-4}-10^{-3}	1100	12	24%
за кроком	10^{-8}	295-370	12	10^{-6}	10^{-3}-10^{-2}	495-880	12	24%
за кроком та порядком	10^{-8}	65-975	9-18	10^{-6}	10^{-3}-10^{-2}	100-855	9-14	34%
Висота орбіти – 1100-300 км, кут нахилу орбіти – 98^0								
без адаптації	–	150	12	–	10^{-5}	200	12	21%
за кроком	10^{-12}	90-335	12	10^{-11}	10^{-5}	125-405	12	14%
за кроком та порядком	10^{-13}	20-780	9-23	10^{-11}	10^{-5}	25-855	9-20	32%

У процесі прогнозування руху КА ДТ-схемами стабілізація диференціальних рівнянь дає змогу:

зменшити обчислювальні витрати на прогнозування на 10–35%;

збільшити крок інтегрування на 12–22%.

для адаптивних ДТ-схем, допускається зменшення на 1–2 порядки заданої відносної похибки інтегрування на одному кроці.

Висновки

У статті запропонована числово-аналітична обчислювальна схема інтегрування стабілізованого за енергією методом Баумгарта диференціального рівняння руху космічних апаратів у Гринвіцькій прямокутній системі координат, яка розроблена на основі диференціально-тейлорівських перетворень. У цілому, використання стабілізації дозволяє підвищити ефективність прогнозування руху космічних апаратів ближнього космосу за критерієм «точність-обчислювальна складність» до 35%.

Незважаючи на те, що усі викладки проведені для моделі руху космічних апаратів у Гринвіцькій прямокутній системі з врахуванням збурення від геопотенціалу Землі та опору "статичної" атмосфери, розроблений підхід може бути застосований, як для інших моделей руху космічних апаратів (у тому числі і для інших систем координат), так і для рішення інших задач динаміки, якщо вихідне диференціальне рівняння допускає застосування стабілізації за методом Баумгарта.

Перспективи подальших досліджень. Напрямом подальших досліджень є розроблення стабілізованих обчислювальних схем для прогнозування руху космічних апаратів на основі диференціально-тейлорівських перетворень у системі оскулюючих елементів.

Конфлікт інтересів. Автори повідомляють про відсутність конфліктів інтересів, що впливають на результати дослідження.

Фінансування. Фінансування дослідження не здійснювалося.

Доступність даних. Дослідження виконано з використанням виключно відкритих даних, доступних у публічних джерелах.

Використання засобів штучного інтелекту (далі – ШІ). Автори підтверджують, що не використовували засоби ШІ під час написання цієї статті.

Список бібліографічних посилань

1. **Ракушев М. Ю.** Метод прогнозирования стабилизированного по энергии движения космического аппарата на основе дифференциально-тейлоровских преобразований. *Проблемы управления и информатики*. 2021. № 2. С. 119–128. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/PUI_2021_2_13 (дата звернення: 10.02.2026). **2. Wertz J. R.** Space mission analysis and design. Microcosm Press,3-rd Edition, 1999. 969 p. **3. Жданюк Б. Ф.** Основы статистической обработки тракторных измерений. Москва : Советское радио, 1978. 384 с. **4. CelesTrak Orbit Vizualization** [online]. Available at: https://www.celestrak.com (Accessed: 10 February 2026). **5. Flores P., Machado M., Seabra E.A.R., Silva M.T.** A Parametric Study on the Baumgarte Stabilization Method for Forward Dynamics of Constrained Multibody Systems. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. January 2011. №6(1). 011019. DOI: https://doi.org/10.1115/1.4002338. **6. Пухов Г. Е.** Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. Киев : Наук. думка, 1986. 159 с. **7. Sakka A. H., Sulayh A. M.** On Taylor Differential Transform Method For The First Painleve´ Equation. *Jordan Journal of Mathematics and Statistics*. 2019. №12(3). P. 391–408. URL: https://jjms.yu.edu.jo/index.php/jjms/article/view/931 (Accessed: 10 February 2026). **8. Ракушев М. Ю.** Прогнозування руху космічних апаратів на основі диференціально-тейлорівських перетворень : монографія. Житомир : О.О. Євенок, 2015. 224 с. **9. Ракушев М.** Вычислительная схема интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений на основе дифференциально-тейлоровского преобразования с автоматическим выбором шага и порядка. *Проблемы управления и информатики*. 2012. № 6. С. 87-96. **10. Ракушев М., Завада А., Ковбасюк С.** Прогнозування руху КА у Гринвіцькій прямокутній системі координат методом диференціально-тейлорівських перетворень. *Системи озброєння і військова техніка*. 2009. № 18. С. 109–114.

MODELLING OF STABILISED EQUATIONS OF MOTION OF SPACECRAFT IN THE GREENWICH COORDINATE SYSTEM BASED ON DIFFERENTIAL TRANSFORMATIONS

***RAKUSHEV Mykhailo*,** Doctor of Technical Sciences, Senior Researcher, National Defence University of Ukraine, Kyiv, Ukraine, https://orcid.org/0000-0002-7703-3287

***ZOTOV Serhii*,** Candidate of Military Sciences, National Defence University of Ukraine, Kyiv, Ukraine, https://orcid.org/0000-0001-8023-6598

***KOSHLAN Oleksandr*,** Doctor of Philosophy, Senior Researcher, National Defence University of Ukraine, Kyiv, Ukraine, https://orcid.org/0000-0001-9678-6463

Formulation of the problem in general. *The purpose of the article is to develop a numerical-analytical computational scheme for integrating the energy-stabilised differential equations of motion of spacecraft in the Greenwich rectangular coordinate system using differential Taylor expansions.*

Research methods. *During the writing of the article, a numerical-analytical computational scheme for predicting the motion of near-space spacecraft in the Greenwich rectangular coordinate system, developed based on differential Taylor expansions, was proposed. Forecasting is performed by integrating the stabilised differential equation for the spacecraft's disturbed motion. The spacecraft motion model accounts for disturbances from Earth's geopotential and atmospheric drag. Stabilisation is carried out by the spacecraft's energy using the Baumgart method. Integration is performed using the differential Taylor series method.*

Literature review. *The right-hand sides of the differential equations describing spacecraft orbital motion are rapidly varying functions that must be integrated with a small step size. This leads to an increase in the number of calculations, resulting in a rapid accumulation of rounding errors. In addition, the equations of motion of spacecraft are unstable according to Lyapunov, which additionally creates favourable conditions for the amplification of errors that accompany the forecasting process. Therefore, when numerical integration is preferred, stable equations are preferred. One stabilisation method for predicting spacecraft motion is the Baumgart method. Despite the fact that, after stabilisation, the equations become more complex and require more calculations, they reduce the computational complexity of integration, since stabilisation increases the integration step while maintaining the accuracy of the numerical solution. One promising approach to developing numerical methods for integrating the differential equations of motion of spacecraft is the use of the mathematical apparatus of differential Taylor transformations. Based on this mathematical apparatus, a number of computational schemes for predicting spacecraft motion have been developed, including adaptive schemes for the integration step and/or order. However, this method has not been used to integrate the stabilised differential equations of motion of spacecraft.*

Research results. *Based on the differential-Taylor transformation method, taking into account the properties of the specified mathematical apparatus, a computational scheme is presented – a typical algorithm for predicting the stabilised motion of a spacecraft. The computational integration schemes with constant step and order are considered, as well as adaptive integration schemes with step and order. For adaptive schemes, the results of predicting the motion* *of spacecraft by the criterion of «accuracy-computational complexity» for a given relative error of integration by phase variables of integration (coordinates in the Greenwich rectangular coordinate system).*

Research novelty. *The article proposes a numerical-analytical computational scheme for integrating the energy-stabilised Baumgart method differential equation of motion for spacecraft in the Greenwich rectangular coordinate system, developed using differential Taylor transformations. The use of stabilisation and differential-Taylor transformations increases the efficiency of predicting the motion of near-space spacecraft.*

Theoretical and practical significance of the article. *The results of mathematical modelling for predicting the motion of near-space spacecraft are presented. Based on the modelling results, recommendations are made for applying the developed approaches to predict spacecraft motion. In general, the use of stabilisation increases the efficiency of predicting the motion of near-space spacecraft, according to the criterion «accuracy-computational complexity» by up to 35%.*

Conclusion and future work. *The direction of further research is the development of stabilised computational schemes for predicting spacecraft motion based on differential Taylor transformations in a system of oscillating elements.*

Keywords*: modelling, differential-Taylor transformations, Baumgart method, spacecraft, integration.*

References

1. Rakushev, M. Y., (2021). The method of forecasting energy-stabilised spacecraft motion based on differential-Taylor transformations. Problems of management and computer science. № 2. 119–128. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/PUI_2021_2_13 (Accessed: 10.02.2026). **2. Wertz, J. R.,** (1999). Space mission analysis and design. Microcosm Press, 3-rd Edition 969. **3. Zhdanyuk, B.F.,** (1978). Fundamentals of statistical processing of tractor measurements. Moscow: Soviet Radio, 384. **4. CelesTrak Orbit Vizualization** [online]. Available at: https://www.celestrak.com (Accessed: 10 February 2026). **5. Flores, P., Machado, M., Seabra, E.A.R., Silva, M.T.,** (January 2021). A Parametric Study on the Baumgarte Stabilization Method for Forward Dynamics of Constrained Multibody Systems. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. №6(1). 011019. DOI: https://doi.org/10.1115/1.4002338. **6. Pukhov, G. E.,** (1986). Differential transformations and mathematical modelling of physical processes. Kyiv : Nauk. Dumka, 159. **7. Sakka, A. H., Sulayh, A. M.,** (2019). On Taylor Differential Transform Method For The First Painleve´ Equation. *Jordan Journal of Mathematics and Statistics*. №12(3).391–408. URL: https://jjms.yu.edu.jo/index.php/jjms/article/view/931 (Accessed: 10 February 2026). **8. Rakushev, M.Y.,** (2015). Prediction of spacecraft motion based on differential Taylor transforms: monograph. Zhytomyr : O.O. Evenok, 224. **9. Rakushev, M.,** (2012). A computational scheme for integrating ordinary differential equations based on the differential-Taylor transform with automatic selection of step and order. Problems of management and informatics. № 6. 87-96. **10. Rakushev, M., Zavada, A., Kovbasyuk, S.,** (2009). Prediction of spacecraft motion in the Greenwich rectangular coordinate system using the method of differential Taylor transformations. Weapon systems and military equipment. № 18. 109–114 .

Рукопис надійшов до редакції *25.03.2026*
Рукопис прийнято до друку після рецензування *08.04.2026*
Дата публікації *30.04.2026*