

ШОВКОШИТНИЙ Ігор Іванович,

доктор військових наук, старший науковий співробітник,
Національного університету оборони України,
<https://orcid.org/0000-0001-9245-4111>

ВАСИЛЕНКО Ольга Анатоліївна,

доктор філософії, Центральний науково-дослідний інститут Збройних Сил України,
<https://orcid.org/0000-0003-2633-0131>

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЦІЛЕРОЗПОДІЛУ РОЮ РІЗНОТИПНИХ УДАРНИХ БЕЗПІЛОТНИХ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ ПО ОБ'ЄКТАХ ГРУПОВИХ ЦІЛЕЙ НА ОСНОВІ «УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ ПРО МУЛЬТИРЮКЗАК ІЗ ПОВТОРЕННЯМИ»

Метою статті є розроблення математичної моделі цілерозподілу рою різнотипних ударних безпілотних літальних апаратів по об'єктах групових цілей на основі «узагальненої задачі про мультирюкзак із повтореннями» для оптимізації використання потенціалу рою з урахуванням пріоритетності об'єктів ураження.

Методи дослідження. Під час написання статті застосовано: загальнонаукові (аналізу, порівняння) та евристичні методи, методи оптимізації, зокрема однієї із задач лінійного цілочисельного програмування.

Отримані результати дослідження. Розроблено математичну модель, яка дозволяє розв'язати задачу цілерозподілу роїв різнотипних ударних безпілотних літальних апаратів по об'єктах групових цілей противника з урахуванням пріоритетів їх ураження. На основі проведеного аналізу оптимізаційних, евристичних та нейромережових методів розподілу неоднорідних ресурсів обрано доцільну математичну постановку задачі, яка найбільш повно описує процес розподілу потенціалу рою різнотипних ударних безпілотних літальних апаратів. Здійснено формалізацію задачі та запропоновано узагальнену схему алгоритму її розв'язання. Серією розрахунків показано працездатність та адекватність запропонованої математичної моделі цілерозподілу рою різнотипних ударних безпілотних літальних апаратів по об'єктах групових цілей на основі «узагальненої задачі про мультирюкзак із повтореннями». На основі запропонованої математичної моделі розроблено алгоритм, який дає змогу урахувати наявну кількість у складі рою ударних безпілотних літальних апаратів різних типів, пріоритет ураження об'єктів групових цілей, умовну цінність ударних безпілотних літальних апаратів, масу їхніх бойових частин.

Елементом наукової новизни є те, що математична модель формалізує математичну постановку типової «задачі про рюкзак», яка дає змогу розв'язувати проблему цілерозподілу рою різнотипних ударних безпілотних літальних апаратів по об'єктах групових цілей з урахуванням пріоритетів їх ураження, визначених за допомогою методу лексикографічної оптимізації, а також визначати набір показників, які характеризують результати такого цілерозподілу, зокрема: матрицю призначення ударних безпілотних літальних апаратів на відповідні об'єкти групових цілей; ймовірність ураження кожного з об'єктів групових цілей; залишок потенціалу рою ударних безпілотних літальних апаратів після завершення цілерозподілу; множини неуразжених об'єктів групових цілей.

Теоретична та практична значущість статті. Запропонована математична модель є подальшим розвитком методичного апарату розв'язання проблем оптимізації пріоритетованого розподілу обмеженої кількості неоднорідних ресурсів по різнорідних об'єктах (задачах). Запропоновані математична модель та алгоритм можуть бути реалізовані в автономних адаптивних системах управління застосуванням роїв ударних безпілотних літальних апаратів. Крім того, за допомогою математичної моделі та алгоритму можуть бути отримані набори адекватних даних для навчання нейронних мереж цілерозподілу рою ударних безпілотних літальних апаратів по об'єктах групових цілей, що є вкрай важливим питанням за умови відсутності реальних статистичних даних.

Ключові слова: ударні безпілотні літальні апарати, рій, групова ціль, математична модель цілерозподілу, «задача про мультирюкзак», алгоритм, оптимізація, моделювання, пріоритет ураження об'єкта.

Вступ

Характерною рисою сьогодення є стрімкий розвиток новітніх технологій, впровадження інноваційних інтелектуальних рішень у всіх сферах діяльності людства. Діалектика розвитку людської цивілізації свідчить про те, що новітні технічні

рішення передусім реалізуються у військовій справі для досягнення переваги над потенційним противником. Російсько-українська війна наочно продемонструвала стрімкий розвиток роботизованих безпілотних систем, інтелектуальних систем

прийняття рішень у процесах розвідки, розподілу ресурсів та ураження цілей. Значну увагу фахівці військової сфери, а також розробники приділяють розвитку та впровадженню ройових технологій, які завдяки високому ступеню самоорганізації дають змогу більш точно та оперативно вирішувати широкий спектр завдань, що є особливо важливим у бойових умовах, коли час на прийняття рішень є критичним параметром.

Постановка проблеми. Застосування роїв різнотипних ударних безпілотних літальних апаратів (далі – БпЛА) для ураження групових цілей (далі – ГЦ) передбачає розв’язання у реальному часі декількох взаємопов’язаних задач – виявлення об’єктів групової цілі, їх розпізнавання (класифікації), узгоджений розподіл окремих БпЛА по об’єктах групових цілей. Останнє завдання належить до класу задач розподілу неоднорідних ресурсів по різнотипних об’єктах і може бути розв’язане за допомогою типових оптимізаційних моделей та алгоритмів або з використанням навчених нейронних мереж. За відсутності адекватних даних для навчання нейронних мереж цілком прийнятним слід вважати отримання навчальних наборів даних на основі розв’язання оптимізаційних задач, які завдяки чітким математичним формулюванням дають змогу отримувати несуперечливі та добре інтерпретовані результати. Проте будь-які обрані оптимізаційні алгоритми потребують певної адаптації (інтерпретації) з урахуванням змісту задачі та мети застосування роїв ударних БпЛА, а також низки специфічних обмежень. З огляду на зазначене, тематика статті, яку присвячено питанням моделювання процесу цілерозподілу (далі – ЦР) рою різнотипних ударних БпЛА по об’єктах групових цілей на основі «задачі про мультирюкзак», є актуальною.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Питання щодо застосування роїв БпЛА досліджувалось у роботах [1–3], де на основі аналізу побудованої логіко-часової моделі застосування роїв ударних БпЛА зроблено висновок про те, що серед усіх можливих етапів такого застосування найбільш важливим (з точки зору кінцевої мети застосування рою БпЛА) є етап цілерозподілу рою ударних БпЛА по об’єктах групових цілей. З математичної точки зору така задача належить до класу задач розподілу неоднорідних ресурсів по різнотипних об’єктах (задачах, роботах), більшість яких є оптимізаційними і мають чіткі формулювання цільової функції та обмежень.

Перспективним напрямом розв’язання таких задач також є використання нейронних мереж [4], які дозволяють оперативно отримувати результати навіть за відсутності чітких аналітичних залежностей від вхідних даних. Зазначене можливе у разі якісного навчання нейронних мереж на великих масивах реальних даних. Проте, у випадку розв’язання задач цілерозподілу роїв різнотипних ударних БпЛА по різнотипних об’єктах ГЦ, отримання таких даних є проблематичним, оскільки ройові алгоритми наразі тільки тестуються у бойових умовах (переважно у системах донаведення і машинного зору), а чіткої статистики результатів бойового застосування саме

роїв ударних БпЛА наразі немає. У таких умовах доцільно врахувати можливість навчання нейронних мереж на результатах оптимізаційних моделей, які за відповідної інтерпретації цільових функцій та обмежень даватимуть раціональні результати, що становитимуть основу наборів даних (dataset) для навчання нейронних мереж. Подібний підхід використано в [5], де показано, що поєднання оптимізаційних (алгоритмічних) та нейромережових підходів дає можливість розв’язувати задачу цілерозподілу рою ударних БпЛА по різнорідних об’єктах нестаціонарної групової цілі у реальному масштабі часу з урахуванням зміни складу групової цілі та рою ударних БпЛА. При цьому зроблено висновок, що математична модель на основі оптимізаційних задач дозволяє отримати набори даних для навчання нейронної мережі цілерозподілу, яка є більш доцільною у разі: зростання розмірності задачі (кількості БпЛА у рої та кількості об’єктів групової цілі), коли оптимізаційна задача внаслідок стрімкого зростання кількості елементарних обчислювальних процедур не дає змоги оперативно отримувати результати цілерозподілу; неповноти вхідних даних про об’єкти групових цілей противника в умовах невизначеності.

Іншим прикладом є математична модель цілерозподілу різновидових засобів вогневого ураження [6] на основі логарифмічної задачі про «М-рюкзак», у якій необхідно знайти оптимальну матрицю призначень, а на її основі – оптимальний розподіл різнотипних ресурсів, зокрема сил та засобів ураження у вогневих ударах сил та засобів авіації. Проте математичну постановку без додаткової адаптації до змісту розв’язуваної задачі цілерозподілу роїв ударних БпЛА по об’єктах ГЦ не може бути використано.

У фахових виданнях також розглядаються близькі за змістом задачі, сутність яких полягає у розподілі обмежених ресурсів для прикриття об’єктів за рівнем їхньої важливості на основі транспортної задачі [7], цілерозподілі засобів ППО під час протидії різнотипним засобам повітряного нападу (балістичним ракетам, дронам-камікадзе) з використанням підходів теорії конфліктів (теорії ігор) та концепції обмеженої раціональності [8]; оцінюванні ефективності розподілу цілей між вогневими підрозділами в умовах протидії противника на основі врахування «вартості» цілей для оптимального використання наявного боєкомплекту [9]. При цьому в публікаціях для врахування критерію вартості авторами часто застосовуються евристичні методи (наприклад, метод вирішальних матриць) для ранжування пріоритетів цілей в умовах невизначеності або способи зведення різнорідних характеристик об’єктів (цілей) до єдиного комплексного показника та його оцінювання за допомогою якісних шкал. Проблема розподілу ресурсів у процесі ройового застосування БпЛА згадується в [10], де зазначену задачу розглядають в контексті побудови динамічної моделі на основі баєсівського навчання, яка даватиме змогу формувати рішення роєм БпЛА з уникненням дублювання призначень БпЛА на одну й ту саму ціль. У цьому плані такий підхід має обмеження, яке не дозволяє призначати декілька БпЛА на одну ціль, що є

нелогічним у випадку застосування роїв різнотипних ударних БпЛА по об'єктах неоднорідних групових цілей противника. Також слід зазначити, що останнім часом у наукових джерелах, де досліджується актуальна проблематика застосування роїв ударних БпЛА, зростає увага до евристичних алгоритмів, у яких акцент зміщується від використання класичних методів оптимізації до квазіоптимальних методів і моделей, які передбачають використання генетичних, мурашиних алгоритмів та штучних нейромереж, що дають змогу оперативного отримувати раціональні варіанти цілерозподілу неоднорідних ресурсів [6].

Детальний опис одного з відомих оптимізаційних методів розподілу неоднорідних ресурсів на основі ітераційних процедур, «задачі про призначення» наведено у статті [11]. Метод враховує різні варіанти сценаріїв несиметричного конфлікту «неоднорідний рій БпЛА – різнорідні об'єкти групової цілі», а завдяки урахуванню введених пріоритетів варіантів призначення (у тому числі з ситуативним формуванням суброїв для ураження більш складних цілей) дає змогу поетапно зводити оптимізаційну задачу до класичної постановки, у якій один БпЛА (або один сформований субрій) призначається на ураження одного об'єкта ГЦ. Проте така постановка задачі має певні зостереження: по-перше, вона дозволяє знаходити скоріше не оптимальний, а наблизений до оптимального план розподілу рою різнотипних ударних БпЛА по різнорідних об'єктах групової цілі; по-друге, у зв'язку із цілочисельністю задачі можлива часткова втрата оптимальності отриманого ефекту; по-третє, завдяки евристично обраним пріоритетам варіантів розподілу ударних БпЛА рою, що враховується у трьох ітераціях цілерозподілу, задача може стати подібною до жадібного алгоритму, який завжди швидко знаходить локально найкраще рішення на кожній ітерації, але не обов'язково гарантує отримання найкращого глобального рішення [12]; по-четверте, оперативність розв'язання задачі є обернено пропорційною до її розмірності, що підтверджується у [11].

Зазначені підходи щодо розподілу неоднорідних ресурсів, оптимізації розподілу сил і засобів та дискретної комбінаторної оптимізації є цікавими, але прямо, без відповідного адаптування, їх не може бути застосовано для розв'язання задачі оптимального розподілу неоднорідного ресурсу рою ударних БпЛА по об'єктах групових цілей. Крім того, для отримання прийнятних результатів цілерозподілу з використанням евристичних алгоритмів на основі технологій ШІ (нейронних мереж) потрібні адекватні навчальні дані, які (за відсутності реальних статистичних даних) може бути отримано на основі розв'язання типових оптимізаційних задач, що мають чітко сформульовані математичні постановки та обмеження.

Зважаючи на зазначене, **метою статті** є розроблення математичної моделі цілерозподілу рою різнотипних ударних БпЛА по об'єктах групових цілей на основі «узагальненої задачі про мультирюкзак із повтореннями» для оптимізації використання потенціалу рою з урахуванням пріоритетності об'єктів ураження.

Виклад основного матеріалу дослідження

Спочатку викладемо загальні міркування. «Задача про рюкзак» (Multiple Knapsack Problem, МКР) [13] та її розширені версії оперують такими поняттями, як «рюкзак»/«ранець» із властивостями «місткості»/«граничної ваги», а також «предмети»/ «ресурси» (відповідної «цінності»), якими мають наповнюватись «рюкзаки». У задачі цілерозподілу неоднорідного рою ударних БпЛА, які мають уражати об'єкти групових цілей, наведені поняття доцільно інтерпретувати так: «рюкзаки» – це об'єкти групових цілей; «місткість»/«гранична вага» рюкзаків – вага вибухових речовин умовного засобу ураження, достатня для ураження об'єкта певного типу у складі групової цілі; «предмети»/ «ресурси» – ударні БпЛА, що розподіляються по об'єктах; «цінність» – абсолютна або умовна ціна ударного БпЛА певного типу, яка пов'язується з його ефективністю (дорожчий БпЛА має більшу вагу бойової частини, а отже, буде більш ефективним під час ураження об'єктів).

Більш простий та найпоширеніший варіант задачі, викладений у [14], передбачає пошук оптимального наповнення одного рюкзака найбільш цінними предметами за умови обмеження його місткості. Узагальнений варіант постановки багатомірної «задачі про рюкзак» викладено в [15]. Проте у цій постановці зроблено акцент на способі розв'язання задачі про багатомірний рюкзак на основі оптимізаційного метода, що базується на моделюванні «поведінки мурашиних колоній», що не повною мірою відповідає принципам поведінки «рою» ударних БпЛА, метою якого є оптимальний розподіл неоднорідного ресурсу (БпЛА різних типів) по об'єктах групової цілі для завдання їй максимального збитку. З цієї точки зору можна скористатись математичною постановкою «узагальненої задачі про мультирюкзак із повтореннями» – типової оптимізаційної задачі, яка дозволяє здійснити оптимальний розподіл ресурсу з умовним «наповненням декількох рюкзаків» предметами (ресурсами) різних типів. У цьому випадку кожний рюкзак є незалежним і можна розв'язувати «задачу про рюкзак з необмеженою кількістю предметів» окремо для кожного рюкзака.

Проте така задача передбачає невичерпність наявних предметів, що обмежує її використання, адже будь-який рій БпЛА є скінченномірним за кількістю ударних БпЛА відповідних типів. Крім того, об'єкти групової цілі на практиці можуть мати різну важливість, а отже, різну пріоритетність їхнього ураження. Якщо врахувати подібні обмеження щодо початкової кількості БпЛА у рої та пріоритетів ураження об'єктів, задача перетворюється на «задачу про мультирюкзак із декількома рюксаками, що мають різний пріоритет, та обмеженим числом копій кожного предмета» (Multi-Knapsack with Bounded Items), що є більш складним різновидом задачі комбінаторної оптимізації у сімействі «задач про рюкзак». Зазначена задача вважається NP-складною, оскільки навіть простіший варіант (один об'єкт, що атакується лише

ударними БпЛА одного i -го типу) буде NP-повною. Отже, задача з багатьма об'єктами та різними типами БпЛА буде ще складнішою для обчислень, особливо у разі суттєвого збільшення розмірності задачі, що підтверджено в [11].

Наведемо формалізований опис математичної моделі задачі цілерозподілу рою різнотипних ударних БпЛА по об'єктах групової цілі з урахуванням пріоритетності ураження об'єктів на основі «узагальненої задачі про мультирюкзак із повтореннями».

Вхідні дані, умови та обмеження. Припустимо, що групова ціль противника містить m об'єктів із визначеними пріоритетами ураження p_j , $j = \overline{1, m}$. Для ураження кожного з об'єктів маса вибухових речовин умовного засобу ураження (у нашому випадку – одного або декількох ударних БпЛА зі складу рою) становить c_j , $j = \overline{1, m}$. Вважається, що маса c_j є достатньою для ураження j -го об'єкта у складі групової цілі. У складі рою, який здійснює ураження об'єктів групової цілі, є n ударних БпЛА з бойовими частинами (БЧ), маса яких становить w_i , $i = \overline{1, n}$. Умовна цінність ударних БпЛА становить v_i , $i = \overline{1, n}$. При цьому вводиться умова $v_{i+1} > v_i$, якщо $w_{i+1} > w_i$. Початкова кількість ударних БпЛА у складі рою становить k_i , $k_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Кожен об'єкт ГЦ може бути атакований одним або декількома ударними БпЛА, об'єднаними у суброї.

Потрібно забезпечити максимальне цільове використання потенціалу рою (сумарної маси БЧ БпЛА), тобто максимізувати сумарну умовну «цінність» всіх i -х ударних БпЛА рою (із масами БЧ w_i), призначених на ураження j -х об'єктів ГЦ, з урахуванням пріоритетів ураження об'єктів p_j і початкової кількості ударних БпЛА k_i (обмеження числа копій кожного предмета) та за умови не перевищення маси вибухових речовин, достатньої для їх ураження c_j (умова не перевантаження рюкзаків).

Цільова функція F передбачає максимізацію сумарної пріоритетованої корисності всіх призначених БпЛА рою:

$$F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (v_i \cdot p_j) \cdot x_{ij} \rightarrow \max \quad (1)$$

за таких обмежень:

$$\sum_{i=1}^n w_i \cdot x_{ij} \leq c_j, \forall j = \overline{1, m}, \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^m x_{ij} \leq k_i, \forall i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \forall i = \overline{1, n}, \forall j = \overline{1, m}, \quad (4)$$

де c_j – маса вибухових речовин, достатня для ураження j -го об'єкта ГЦ;

k_i – початкова кількість ударних БпЛА у рої (на початок цілерозподілу);

x_{ij} – цілочисельний аргумент призначення;

w_i – маса бойової частини i -го БпЛА.

Вираз (2) враховує обмеження щодо «місткості» кожного «рюкзака» (не перевищення ваги вибухових

речовин, достатньої для ураження j -го об'єкта, c_j), вираз (3) – обмеження щодо початкової кількості ударних БпЛА k_i у рої, а умова (4) вказує на цілочисельність та невід'ємність змінних аргумента x_{ij} .

Слід зазначити, що у цільовій функції (1) показник p_j фактично спрямовує оптимізаційний алгоритм розподіляти найбільш «цінні» ударні БпЛА (тобто з більшою масою БЧ w_i , а отже, й із кращими уражальними властивостями) на об'єкти з більшим пріоритетом. Проте під час постановки задачі та виборі значень пріоритетів слід уникати неявної пріоритетизації (з малою різницею значень p_j), щоб забезпечити призначення на більш важливий j -й об'єкт ГЦ максимально можливої кількості БпЛА i -го типу, і лише після цього (з урахуванням пріоритетів) розподіл потенціалу рою здійснюватиметься на $j+1$ -й об'єкт ГЦ з урахуванням «цінності» БпЛА. Для уникнення неоднозначності отримуваних результатів цілерозподілу необхідно орієнтовно визначеним пріоритетам об'єктів ГЦ, заданим у вербальній формі (“об’єкт 1” > “об’єкт 2” > ... > “об’єкт m ”)

присвоїти числові значення, які будуть значно відрізнятися між собою та вказувати на чітку ієрархію пріоритетів ураження об'єктів, а математично формуватимуть послідовність найбільш «корисних об'єктів» для цільової функції (1). Тобто має виконуватись умова:

$$p_1 \gg p_2 \gg \dots \gg p_{m-1} \gg p_m. \quad (5)$$

Умови (5) можуть бути досягнуті завдяки застосуванню експоненційного принципу пріоритетизації «рюкзаків» (об'єктів ГЦ) або методу лексикографічної оптимізації, відповідно до якої задача розв'язуватиметься послідовно для кожного j -го об'єкта у порядку зменшення їхнього пріоритету [16]. Такий підхід є найбільш раціональним, якщо пріоритетність об'єктів ГЦ буде не задана, а оцінюватиметься за певною кількістю нерівнозначних критеріїв, до яких, наприклад, може бути віднесено: належність об'єкта до певної підсистеми (управління, розвідки, вогневого ураження, радіоелектронної боротьби, забезпечення), ступінь захищеності, готовності до застосування тощо). Загалом у задачах розподілу неоднорідних ресурсів, які часто зустрічаються під час вирішення певних проблем у військовій галузі, лексикографічний підхід є найбільш прийнятним, адже він дає змогу сформулювати жорсткі логічні правила прийняття рішень у системах управління зброєю. Такі правила передбачають першочергове гарантоване ураження критичних об'єктів, які є найбільш загрозливими для наших підрозділів та/або для рою ударних БпЛА, і лише після цього ураження другорядних об'єктів залишком потенціалу рою.

Розглянемо узагальнену схему алгоритму, який демонструє логіку розв'язання задачі цілерозподілу рою різнотипних ударних БпЛА по об'єктах ГЦ на основі «узагальненої задачі про мультирюкзак із повтореннями» (рис. 1).



Рисунок 1 – Узагальнена схема алгоритму розв'язання задачі цілерозподілу рою ударних БПЛА по об'єктах групових цілей на основі «узагальненої задачі про мультирюкзак із повтореннями»

Алгоритм передбачає такі кроки.

Крок 1. Введення вхідних даних. На цьому кроці вводяться: множина даних щодо рою ударних БПЛА $\{Q\}$ (типи БПЛА, їхня початкова кількість, «цінність» та маса БЧ); множина даних про виявлені об'єкти ГЦ противника $\{R\}$ (дані щодо виявлених та ідентифікованих об'єктів ГЦ, необхідна маса вибухових речовин для гарантованого ураження кожного j -го об'єкта, пріоритетність їх ураження). Крім того, здійснюється побудова порожньої матриці призначення $X, x_{ij} = 0$, яка означає, що цілерозподіл ударних БПЛА ще не здійснено.

Крок 2. Ранжування об'єктів ГЦ та ударних БПЛА рою. Для побудови ієрархії пріоритетів ураження об'єктів ГЦ здійснюється упорядкування введених даних. Об'єкти ГЦ ранжуються за пріоритетом ураження відповідно до умови (5), при цьому найвищий пріоритет матиме об'єкт з індексом $j=1$.

$$p_1 = \max_j p_j, \forall j = \overline{1, m}. \quad (6)$$

Ударні БПЛА рою ранжуються за параметром їхньої умовної «цінності» (відповідно до введеної умови: $v_{i+1} > v_i$, якщо $w_{i+1} > w_i$):

$$v_1 = \max_i v_i, v_{i+1} < v_i, \forall i = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Крок 3. Цілерозподіл рою ударних БПЛА за пріоритетами об'єктів ГЦ. Задача розв'язується циклічно для всіх j -х об'єктів починаючи з пріоритетного ($j=1$). У кожному циклі здійснюється:

3.1 Перевірка потреби призначення БПЛА на j -й об'єкт. Якщо на об'єкт уже призначено необхідну кількість i -х БПЛА, вважається, що об'єкт вже

недоступний для цілерозподілу ($c_j=0$), і відбувається перехід до наступного об'єкта ($j:=j+1$);

3.2 Розв'язання локальної «задачі про рюкзак», у результаті чого підбирається оптимальна комбінація БПЛА i -х типів за умови не перевищення параметра c_j (із максимізацією $\sum (w_i \cdot x_{ij}) \leq c_j$) та наявної на початок s -ітерації кількості БПЛА i -х типів (k_i^s);

3.3 Перерахунок залишку потенціалу рою ударних БПЛА після кожної s -ітерації призначення БПЛА на j -й об'єкт ГЦ. При цьому призначені БПЛА виключаються зі складу рою:

$$k_i^{s+1} = k_i^s - \sum_i x_{ij}^s, \forall i \in \overline{1, n}, s \in \mathbb{Z}_{>0}; \quad (8)$$

3.4 Перевірка умов не перевантаження j -го «рюкзака» (не перевищення сумарної маси БЧ ударних БПЛА, призначених на j -й об'єкт):

$$c_j - \sum_{i=1}^n w_i \cdot x_{ij} \geq 0, \forall j = \overline{1, m}. \quad (9)$$

Алгоритм має враховувати низку умов, які визначають правила переходу до наступної ітерації цілерозподілу залишку потенціалу рою БПЛА або його завершення.

Крок 4. Перевірка умов переходу до наступних кроків алгоритму цілерозподілу. На цьому кроці необхідно врахувати декілька правил. Зокрема, перехід до ітерації «наповнення наступного рюкзака» (цілерозподілу БПЛА на об'єкти ГЦ з меншим пріоритетом, $j \rightarrow j+1$) здійснюється, якщо поточний j -й об'єкт «заповнений» на 100% або, враховуючи неподільність маси БЧ ударних БПЛА рою, – «заповнений» максимально з урахуванням сумарної маси БЧ ударних БПЛА i -х типів, які були на нього призначені:

$$\sum_{i=1}^n w_i \cdot x_{ij} < c_j, \sum_{i=1}^n w_i \cdot x_{ij} \rightarrow \max, \quad (10)$$

або якщо залишок незаповненого рюкзака Δc_j є меншим за найменшу масу w_i БЧ доступного БпЛА i -го типу:

$$\Delta c_j < \min_i w_i. \quad (11)$$

Зупинка алгоритму здійснюється у разі виконання однієї з умов, коли потенціал рою ударних БпЛА вичерпано ($k_i=0$) або об'єктів для ураження у складі ГЦ вже не залишилось:

$$m - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} = 0. \quad (12)$$

У разі виконання умов (10)–(12) здійснюється перехід до кроку 5.

Крок 5. Оцінювання результатів цілерозподілу рою різнотипних ударних БпЛА по об'єктах ГЦ. На цьому кроці отримуються:

5.1 Матриця призначення $X = \|x_{ij}\|$. Після завершення роботи алгоритму всі отримані значення x_{ij} зводяться у двовимірну матрицю призначення $m \times n$, у рядках якої вказуються типи ударних БпЛА, а у стовпцях – об'єкти групової цілі, на які буде призначено ударні БпЛА рою. У комірках, утворених перетином рядків і стовпців, відобразатимуться обчислені значення аргументів x_{ij} – кількості БпЛА i -го типу, призначених для ураження j -го об'єкта у складі групової цілі.

Отримані значення аргументів фактично є розв'язком для автономної системи прийняття рішення, яка керує роєм ударних БпЛА на етапі цілерозподілу для забезпечення його цільового використання та завдання максимального збитку груповій цілі з урахуванням пріоритетів об'єктів ураження та ресурсних обмежень. Зокрема, будь-яке отримане у матриці призначення числове значення аргументу (наприклад, $x_{ij}=a$) інтерпретуватиметься таким чином: «призначити a одиниць ударних БпЛА i -го типу для ураження j -го об'єкта групової цілі».

5.2 Ступінь «наповнення рюкзаків», що фактично інтерпретується як ступінь (імовірність) ураження кожного j -го об'єкта групової цілі визначеним у результаті оптимізації складом суброю ударних БпЛА i -го типу:

$$q_j = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \cdot x_{ij}}{c_j} \cdot 100\%. \quad (13)$$

5.3 Залишок потенціалу рою ударних БпЛА після завершення s -ітерацій цілерозподілу i -х типів БпЛА по об'єктах ГЦ:

$$\Delta k_i = k_i - \sum_s \sum_i x_{ij}^s. \quad (14)$$

5.4. Залишок об'єктів ГЦ, на які (після виконання всіх умов алгоритму) розподіл БпЛА вже не може бути здійснено. Зазначене передбачає формування на основі початкової множини об'єктів ГЦ (J) та множини розподілених об'єктів (J_p) відповідної множини j -х об'єктів (J_n), для яких сумарна кількість призначених ударних БпЛА i -х типів дорівнюватиме нулю, тобто для яких виконуватиметься умова:

$$J_n = J \setminus J_p = \left\{ j \in J \mid \sum_{i=1}^n x_{ij} = 0 \right\}. \quad (15)$$

Для перевірки працездатності наведеного вище алгоритму проведено чисельний експеримент. З цією метою алгоритм реалізовано з використанням мови програмування Python і онлайн-сервіса Google Colaboratory.

Розрахунки проведено для таких вхідних даних. На групову ціль противника (ракетну батарею типу «Точка-У» на стартовій позиції) спрямовано рій різнотипних ударних БпЛА (загальною кількістю $n=10$) трьох типів (3 БпЛА «Switchblade», маса БЧ 0,25 кг, 3 БпЛА «Warmate», маса БЧ 0,8 кг, 4 БпЛА «РАМ II UAV», маса БЧ 3 кг). Відповідно найбільшу цінність мають БпЛА «РАМ II UAV», найменшу – «Switchblade». Групову ціль містить три об'єкти (командно-штабна машина (КШМ); 2 самохідних пускових установки тактичних ракет, одна розгорнута, друга в похідному положенні). КШМ є більш пріоритетним об'єктом ураження, згорнута пускова установка має останній пріоритет. Маса вибухових речовин, достатня для ураження об'єктів за зменшенням їхніх пріоритетів, становить, відповідно, 8 кг, 5 кг і 5 кг.

На рис. 2 наведено результати моделювання цілерозподілу рою різнотипних ударних БпЛА по об'єктах ГЦ (на основі «узагальненої задачі про мультирюкзак із повтореннями».

```

=====
СТАТУС: OPTIMAL
ГЛОБАЛЬНИЙ ОПТИМУМ (цільова функція): 72.0
=====
Ресурс (i) \ Цілі (j)      KSM      PU1      PU2 | Використано/Наявно
-----
Switchblade                1         2         0 | 3 / 3
Warmate                    2         1         0 | 3 / 3
RAMIIUAV                   2         1         1 | 4 / 4
-----
Вага на цілі:              7.85/8    4.3/5     3.0/5
=====
<>:56: SyntaxWarning: invalid escape sequence '\ '
<>:56: SyntaxWarning: invalid escape sequence '\ '
/tmp/ipython-input-1877877152.py:56: SyntaxWarning: invalid escape sequence '\ '
header = f"{'Ресурс (i) \ Цілі (j)':<20}' + ' ".join(['{t:>15}' for t in targets]) + " | Використано/Наявно"

```

Рисунок 2 – Результати моделювання цілерозподілу рою ударних БпЛА по об'єктах групових цілей (на основі «узагальненої задачі про мультирюкзак із повтореннями»)

Результати розв'язання задачі цілерозподілу рою різнотипних ударних БПЛА по об'єктах ГЦ показали таке. КШМ уражена з імовірністю 98% («Switchblade» – 1, «Warmate» – 2, «RAM II UAV» – 2), розгорнута ПУ – на 86% («Switchblade» – 2, «Warmate» – 1, «RAM II UAV» – 1), згорнута – на 60% («Switchblade» – 0, «Warmate» – 0, «RAM II UAV» – 1). При цьому використано весь ресурс рою ударних БПЛА.

Збільшення маси БЧ БПЛА «RAM II UAV» до 4 кг (за всіх інших незмінних параметрів) призводить до перерозподілу потенціалу рою. При цьому один БПЛА залишається невикористаним. КШМ уражена з імовірністю 89% («Switchblade» – 3, «Warmate» – 3, «RAM II UAV» – 1), розгорнута ПУ – на 80% («Switchblade» – 0, «Warmate» – 0, «RAM II UAV» – 1), згорнута – на 80% («Switchblade» – 0, «Warmate» – 0, «RAM II UAV» – 1). При цьому залишається невикористаним один БПЛА «RAM II UAV».

Отримані результати розрахунків за наведеними прикладами підтверджують доцільність використання запропонованої математичної моделі та алгоритму для розв'язання задачі цілерозподілу рою різнотипних ударних БПЛА по об'єктах групових цілей на основі «узагальненої задачі про мультирюкзак із повтореннями».

Висновки

У статті розроблено математичну модель цілерозподілу рою різнотипних ударних безпілотних літальних апаратів по об'єктах групових цілей на основі «узагальненої задачі про мультирюкзак із повтореннями». На основі проведеного аналізу наукових публікацій щодо оптимізаційних, евристичних та нейромережових методів розподілу неоднорідних ресурсів обрано найбільш доцільну математичну постановку задачі, яка найбільш повно описує процес цілерозподілу ударних безпілотних літальних апаратів по об'єктах групових цілей з урахуванням пріоритетності їх ураження.

Також запропоновано алгоритм, що реалізує послідовність дій, передбачених математичною моделлю, у якій складна комбінаторна задача зводиться до послідовності простих задач наповнення кожного з «рюкзаків» (розподілу ударних безпілотних літальних апаратів на об'єкти групових цілей) у міру зниження їхніх пріоритетів та з урахуванням обмежень щодо їх наповнення.

Запропоновані математична модель та алгоритм дають змогу визначати: матрицю призначення ударних безпілотних літальних апаратів на відповідні об'єкти групових цілей; імовірність ураження кожного з

об'єктів групових цілей; залишок потенціалу рою ударних безпілотних літальних апаратів після завершення цілерозподілу; множину неуражених об'єктів групових цілей.

Адекватність математичної моделі та алгоритму забезпечується чіткою математичною постановкою оптимізаційної задачі з коректним формуванням умов та обмежень, а також результатами проведеного математичного моделювання цілерозподілу за різними варіантами вхідних даних. Наведені приклади чисельного експерименту підтвердили логіку та несуперечливість результатів математичної моделі та алгоритму, в основу яких покладено одну з можливих інтерпретацій «задачі про мультирюкзак».

Перспективними напрямками подальших досліджень слід вважати: формування множин вхідних даних для моделювання цілерозподілу (за допомогою запропонованого алгоритму) з метою отримання адекватних навчальних даних для подальшого тренування нейронних мереж цілерозподілу, що становитимуть основу автономних адаптивних систем управління застосуванням роїв ударних безпілотних літальних апаратів. З теоретичної точки зору увагу дослідників доцільно зосередити на формулюванні математичних постановок задачі розподілу неоднорідних ресурсів на основі альтернативних оптимізаційних підходів, а також оцінюванні та порівнянні результатів, отриманих за такими підходами розв'язання задач розподілу неоднорідних ресурсів по різномірних об'єктах. Також доцільно розглянути й інші постановки «задачі про мультирюкзак», у яких враховуватимуться інші або додаткові умови та обмеження, зокрема протидія засобів протиповітряної оборони й радіоелектронної боротьби противника.

Конфлікт інтересів. Автори повідомляють про відсутність конфліктів інтересів, що впливають на результати дослідження.

Фінансування. Фінансування дослідження не здійснювалося.

Доступність даних. Дослідження виконано з використанням виключно відкритих даних, доступних у публічних джерелах.

Використання засобів штучного інтелекту. Під час написання статті засоби штучного інтелекту для пошуку й аналізу інформації, моделювання, оброблення бібліографічних джерел, перекладу чи генерування тексту не використовувалися, а всі матеріали створені авторами самостійно з дотриманням норм академічної доброчесності, авторських прав та етичних норм наукового дослідження.

Список бібліографічних посилань

1. Шовкошитний І. І., Василенко О. А. Проблемні питання ройового застосування ударних безпілотних літальних апаратів. *Сучасні інформаційні технології у сфері безпеки та оборони*. Київ. НУОУ. 2023. № 3 (48). С. 27–34. DOI: <https://doi.org/10.33099/2311-7249/2023-48-3-27-34>.

2. Шовкошитний І. І., Василенко О. А. Розроблення логіко-часової моделі ройового застосування ударних безпілотних літальних апаратів з урахуванням типових

способів їх групового застосування в сучасних умовах. *Зб. наук. пр. Центру воєнно-стратегічних досліджень Нац. ун-ту оборони України*. 2024. № 3 (83). С. 108–116. DOI: <https://doi.org/10.33099/2304-2745/2024-3-83/108-116>.

3. Таршин В. А., Компанієць О. М., Котляренко С. Є., Дужий Р. В. Розвиток методології управління роями БПЛА на основі ройового інтелекту. *Зб. наук. пр. Держ. наук.-досл. ін-ту авіації*. 2023. Вип. 19 (26). С. 109–115. DOI:

- <https://doi.org/10.54858/dndia.2023-19-15>. 4. Аггарвал Ч. Нейронные сети и глубокое обучение: учебный курс. Пер. с англ. СПб. : ООО «Диалектика», 2020. 752 с.
5. Шовкошитний І. І., Василенко О. А. Математична модель застосування рою ударних безпілотних літальних апаратів для ураження нестационарних групових цілей із використанням елементів штучного. *Повітряна міць України*. 2025. № 2 (9). С. 48–56. DOI: <https://doi.org/10.33099/2786-7714-2025-2-9-48-56>.
6. Василенко О. А. Методи математичного моделювання застосування рою ударних безпілотних апаратів. *Повітряна міць України*. 2025. № 1 (8). С. 54–70. DOI: <https://doi.org/10.33099/2786-7714-2025-1-8-54-70>.
7. Сапичев М., Шкурат Б., Резнік Д., Мильников Г. Комбінований підхід до оптимізації забезпечення засобами ураження підрозділів протиповітряної оборони. *Повітряна міць України*. № 2 (9). 2026. С. 87–95. DOI: <https://doi.org/10.33099/2786-7714-2025-2-9-87-95>.
8. Резнік Д., Паталаха В., Глоба О., Шкурат Б. Перспективи застосування теорії конфліктів для організації взаємодії сил і засобів протиповітряної оборони. *Повітряна міць України*. 2026. № 2 (9). С. 57–63. DOI: <https://doi.org/10.33099/2786-7714-2025-2-9-57-63>.
9. Піскунов М. С., Кудряшов В. Є., Філіппенков О. В. Приватна модель визначення ефективності цілерозподілу в умовах протидії противника. *Системи озброєння і військова техніка*. 2021. № 1 (65). С. 107–112. DOI: <https://doi.org/10.30748/soivt.2021.65.15>.
10. Компанієць О. М. Модель байєсівського навчання рою безпілотних літальних апаратів для оновлення переконань щодо поточного стану поля бою. *Зб. наук. пр. Харківського нац. ун-ту Повітряних Сил*. 2024. № 3 (81). С. 27–31. DOI: <https://doi.org/10.30748/zhups.2024.81.04>.
11. Шовкошитний І. І., Василенко О. А. Управління цілерозподілом рою різнотипних ударних безпілотних літальних апаратів для ураження нестационарних групових цілей на основі адаптивного алгоритму з використанням методів оптимізації та елементів штучного інтелекту. *Сучасні інформаційні технології у сфері безпеки та оборони*. 2025. № 3 (54). С. 15–24. DOI: <https://doi.org/10.33099/2311-7249/2025-54-3-15-24>.
12. Махно М. Ф. Дис. ... канд. техн. наук: 01.05.04. Моделі та методи розв'язання нечітких задач оптимального розподілу часового ресурсу. Київ : КНУ ім. Тараса Шевченка, 2017. 146 с. URL: <https://surl.li/lxnhqb> (дата звернення: 10.01.2026).
13. Задача про рюкзаки. Математична модель задачі про рюкзаки. 2018. URL: <https://surl.li/qfpxpx> (дата звернення: 13.01.2026).
14. Бурков В. Н., Горгидзе И. А., Ловецкий С. Е. Прикладные задачи теории графов. Тбилиси : Мецниереба, 1974. 234 с.
15. Задача про рюкзаки. 2018. URL: <https://surl.li/gzgary> (дата звернення: 15.01.2026).
16. Подиновский В. В. Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2007. 64 с.

MATHEMATICAL MODEL OF TARGET DISTRIBUTION OF A SWARM OF DIFFERENT TYPES OF STRIKE UNMANNED AERIAL VEHICLES BY GROUP TARGETS BASED ON THE GENERALISED MULTIPLE KNAPSACK PROBLEM WITH REPETITIONS

SHOVKOSHYTNYI Ihor, Doctor of Military Science, Senior Research Fellow, National Defence University of Ukraine, <https://orcid.org/0000-0001-9245-4111>

VASYLENKO Olha, PhD, Central Scientific and Research Institute of Armed Forces of Ukraine, <https://orcid.org/0000-0003-2633-0131>

Formulation of the problem in general. The use of swarms of different types of strike unmanned aerial vehicles to engage group targets involves solving several interrelated tasks in real time: identifying group target objects, recognising (classifying) them, and coordinating the distribution of individual strike unmanned aerial vehicles among them. The latter task belongs to the class of resource distribution problems across different types of objects and can be solved using standard optimisation models and algorithms or trained neural networks. In the absence of adequate data for training neural networks, it is quite acceptable to obtain training datasets by solving optimisation problems, which, thanks to their clear mathematical formulations, yield consistent and well-interpretable results. However, any selected optimisation algorithms require adaptation (interpretation), taking into account the task content, the purpose of using swarms of strike unmanned aerial vehicles, and specific limitations. With this in mind, the article's topic, which is devoted to modelling the distribution of a swarm of different types of strike unmanned aerial vehicles among group targets using the «multiple knapsack problem», is relevant.

Literature review. The analysis of scientific sources on the chosen topic shows that the methods used cannot be used to target a heterogeneous swarm of attack unmanned aerial vehicles at heterogeneous objects within the enemy's group without additional adaptation. Alternatively, the problem can be solved using iterative procedures and the standard calculation procedure provided by the «generalised multiple knapsack problem with repetitions».

Research results. A mathematical model has been developed that allows solving the problem of distributing swarms of different types of strike unmanned aerial vehicles among enemy group targets, taking into account the priorities of their destruction. Based on the analysis of optimisation, heuristic, and neural network methods for the distribution of heterogeneous resources, an appropriate mathematical formulation of the problem was selected, which most fully describes the process of distributing the potential of a swarm of different types of strike unmanned aerial vehicles. The problem was formalised, and a generalised algorithm for its solution was proposed. A series of calculations demonstrated the feasibility and adequacy of the proposed mathematical model for distributing a swarm of different types of strike unmanned aerial vehicles among group targets based on the «generalised multiple knapsack problem with repetitions».

Research novelty. The mathematical model formalizes the mathematical formulation of a typical «multiple knapsack problem» which makes it possible to solve the problem of distributing a swarm of different types of strike unmanned aerial vehicles among group targets, taking into account the priorities for their destruction, determined using

the lexicographic optimization method, as well as determine a set of indicators that characterize the results of such target distribution, in particular: the matrix of assigning strike unmanned aerial vehicles to corresponding group targets; the probability of hitting each of the group targets; the remaining potential of the swarm of strike unmanned aerial vehicles after the completion of target allocation; the set of unhit group targets.

Theoretical and practical significance. Theoretical and practical significance of the article. The proposed mathematical model is a further development of the methodological apparatus for optimising the prioritised distribution of a limited number of heterogeneous resources among heterogeneous objects (tasks). The proposed mathematical model and algorithm can be implemented in autonomous adaptive control systems using swarms of strike unmanned aerial vehicles. In addition, the mathematical model and algorithm can be used to obtain sets of adequate data for training neural networks to distribute swarms of strike unmanned aerial vehicles among group target objects, which is extremely important in the absence of real statistical data.

Conclusions and future work. Promising areas for further research include: generating sets of input data for modelling the target distribution (using the proposed algorithm) to obtain adequate training data for further training of target distribution neural networks, which will form the basis of autonomous adaptive control systems for the use of strike UAV swarms. From a theoretical point of view, it is advisable for researchers to focus on formulating mathematical formulations of the problem of distributing heterogeneous resources based on alternative optimisation approaches, as well as evaluating and comparing the results obtained using such approaches to solving problems of distributing heterogeneous resources across heterogeneous objects. It is also advisable to consider other formulations of the «multiple knapsack problem» that take into account other or additional conditions and constraints, in particular, countermeasures by enemy air defence and electronic warfare systems.

Keywords: strike unmanned aerial vehicles, swarm, group target, mathematical model of target distribution, «multiple knapsack problem», algorithm, optimisation, modelling, target priority.

References

1. Shovkoshytskyi, I. I., Vasylenko, O. A., (2023). Problematic issues of swarm application of strike unmanned aerial vehicles. *Modern information technologies in the field of security and defence*. 3 (48), 27-34. DOI: <https://doi.org/10.33099/2311-7249/2023-48-3-27-34>.
2. Shovkoshytskyi, I. I., Vasylenko, O. A., (2024). Development of a logical-temporal model for the swarm application of strike unmanned aerial vehicles, taking into account typical methods of their group application in modern conditions. *Collection of scientific works of the Centre for Military and Strategic Studies of the National University of Defence of Ukraine*. 3 (83), 108-116. DOI: <https://doi.org/10.33099/2304-2745/2024-3-83/108-116>.
3. Tarshyn, V. A., Kompaniets, O. M., Kotlyarenko, S. Ye., Duzhyi, R. V., (2023). Development of a methodology for managing swarms of UAVs based on swarm intelligence. *Collection of scientific papers of the State Scientific Research Institute of Aviation*. 19 (26), 109–115. DOI: <https://doi.org/10.54858/dndia.2023-19-15>.
4. Aggarwal, Ch., (2020). *Neural Networks and Deep Learning: A Course*. Translated from English. St. Petersburg, Dialectics LLC. 752.
5. Shovkoshytskyi, I. I., Vasylenko, O. A., (2025). Mathematical model of the use of a swarm of strike unmanned aerial vehicles to engage non-stationary group targets using artificial elements. *Air Power of Ukraine*. 2(9), 48-56. DOI: <https://doi.org/10.33099/2786-7714-2025-2-9-48-56>.
6. Vasylenko, O. A., (2025). Methods of mathematical modelling of the use of swarms of strike unmanned aerial vehicles. *Air Power of Ukraine*. 1(8), 54-70. DOI: <https://doi.org/10.33099/2786-7714-2025-1-8-54-70>.
7. Sapichev, M., Shkurat, B., Reznik, D., Milnikov, G., (2026). A combined approach to optimising the provision of weapons for air defence units. *Air Power of Ukraine*. 2(9), 87-95. DOI: <https://doi.org/10.33099/2786-7714-2025-2-9-87-95>.
8. Reznik, D., Patalakha, V., Globa, O., Shkurat, B., (2026). Prospects for applying conflict theory to organise the interaction of air defence forces and means. *Air Power of Ukraine*. 2 (9), 57-63. DOI: <https://doi.org/10.33099/2786-7714-2025-2-9-57-63>.
9. Piskunov, M. S., Kudryashov, V. E., Filippenkov, O. V., (2021). A private model for determining the effectiveness of target allocation in conditions of enemy counteraction. *Weapons Systems and Military Equipment*. 1(65), 107-112. DOI: <https://doi.org/10.30748/soivt.2021.65.15>.
10. Kompaniets, O. M., (2024). Bayesian learning model of a swarm of unmanned aerial vehicles for updating beliefs about the current state of the battlefield. *Collection of scientific works of the Kharkiv National University of Air Forces*. 3 (81), 27-31. DOI: <https://doi.org/10.30748/zhups.2024.81.04>.
11. Shovkoshytskyi, I. I., Vasylenko, O. A., (2025). Management of target distribution of a swarm of different types of strike unmanned aerial vehicles for striking non-stationary group targets based on an adaptive algorithm using optimization methods and elements of artificial intelligence. *Modern information technologies in the field of security and defence*. 3(54), 15-24. DOI: <https://doi.org/10.33099/2311-7249/2025-54-3-15-24>.
12. Makhno, M. F. Dissertation ... Candidate of Technical Sciences: 01.05.04. Models and methods for solving fuzzy problems of optimal time resource allocation [online]. Kyiv. Taras Shevchenko National University of Kyiv, 2017. 146. Available at: <https://surl.li/lxnqhb> [Accessed: 10 January 2026].
13. **The backpack problem**, (2018). Mathematical model of the backpack problem [online]. Available at: <https://surl.li/qfxpxo> [Accessed: 13 January 2026].
14. Burkov, V. N., Gorgidze I. A., Lovetsky S. E., (1974). Applied problems of graph theory. Tbilisi. Metsniereba.
15. **The knapsack problem** [online]. 2018. Available at: <https://surl.li/gztary> [Accessed: 15 January 2026].
16. Podinovsky, V. V., (2007). Introduction to the theory of the importance of criteria in multi-criteria decision-making problems. Moscow: FIZMATLIT.

Рукопис надійшов до редакції 27.02.2026
 Рукопис прийнято до друку після рецензування 06.04.2026
 Дата публікації 30.04.2026