УДК 358.3:528

***Володимир Іванович Шарий** (д-р військ. наук, професор, провідний науковий співробітник центру)*[1]
***Анатолій Іванович Невольниченко** (канд. техн. наук, с.н.с., провідний науковий співробітник центру)*[1]
***Олексій Петрович Федченко** (канд. військ. наук, начальник науково-дослідного відділу)*[2]
***Максим Георгійович Тищенко** (канд. техн. наук, науковий співробітник науково-дослідної лабораторії)*[2]

[1]***Військовий інститут Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Київ, Україна***
[2]***Національний університет оборони України імені Івана Черняховського, Київ, Україна***

АДАПТАЦІЯ МЕТОДУ ДАНЦИГА ДЛЯ ВИРІШЕННЯ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ ПЛАНУВАННЯ КОМБІНОВАНОГО ВОГНЕВОГО УРАЖЕННЯ

В статті розглядається змістова і формальна постановка "прямої" і "оберненої" задач планування вогневого ураження різнорідних класів цілей методом комбінованих ударів силами бомбардувальної і штурмової авіації та ракетних військ оперативного угруповання. Для вирішення задач даного класу, як "типових" задач цілочисельного лінійного програмування, надається версія симплексного методу Данцига при векторному аргументі цільової функції і функцій-обмежень, що адаптована до "динамічної ефективності" поточного рішення. Не цілочисельне рішення приводиться до цілочисельного методом "гілок і меж" за принципом "найближчої припустимої точки". Надається чисельний приклад вирішення прямої і оберненої задачі та алгоритм комп'ютерної процедури "симплекс-перетворення", що реалізує даний метод, для спеціального математичного і програмного забезпечення АСУВ (с). Показано, що вирішення прямої (другорядної) чи оберненої (основної) задачі максимізує ефективність рішення-плану комбінованого вогневого ураження.

***Ключові слова:** комбінований удар, пряма і обернена задача, цілочисельне лінійне програмування, динамічна ефективність поточного рішення, симплекс-процедура, метод Данцига.*

Вступ

Постановка проблеми. Задача комбінованого вогневого ураження різнорідних класів цілей різнорідними засобами є різновидом основної задачі організаційного управління при плануванні операції угруповання військ (сил), але потребує коректної змістової і формальної постановки для її вирішення на комп'ютерних засобах автоматизації управління.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В останніх воєнно-наукових дослідженнях [2, 3] розглянута проблема підвищення бойової ефективності ОУВ (с) переходом до "оптимального" організаційного управління на основі методів лінійного програмування з використанням АСУВ (с).

Дана задача планування комбінованого вогневого ураження різнорідних класів цілей різнорідними засобами є новим різновидом задачі цілочисельного лінійного програмування при плануванні операції угруповання військ (сил), яка потребує коректної змістової й формальної постановки і адаптації методів її вирішення на комп'ютерних засобах автоматизації управління військами і зброєю.

Метою статті є надання постановки задачі планування комбінованого вогневого ураження (ВУ) та адаптація методів її ефективного вирішення на комп'ютерних засобах автоматизації управління військами (силами).

Виклад основного матеріалу дослідження

1. Формальна постановка "прямої" задачі та адаптація методу Данцига для її вирішення

Нехай задана формальна постановка так званої "прямої" задачі розподілу ресурсу (максимізація ефекту при обмежених ресурсах), як задачі лінійного програмування [1] – на множині планів-векторів $\{X\}$, кожний з котрих має невід'ємний кортеж – $X = \left\langle x_j \ge 0, j = \overline{1,n} \right\rangle$ (1)

і задовольняє систему обмежень-нерівностей (критерій придатності рішень X) –

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \left(\le, \ge\right)\ b_i,\ \ i = \overline{1,m}, \qquad (2)$$

знайти такий (оптимальний) вектор –

$$X^o = \left\langle x_j^o, j = \overline{1,n} \right\rangle, \qquad (3)$$

який надає екстремальне значення лінійній формі цільової функції (критерій оптимальності єдиного рішення X^o з підмножини придатних) –

$$L(X^o) = c_o + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^o = \underset{\{X\}}{\mathrm{extr}}\, L(X). \qquad (4)$$

Для переходу до формальної постановки "основної" задачі ЛП потрібно:

по-перше, ввести в "базис" (шуканих змінних) додаткові невід'ємні змінні (вектор Y)

$$Y = \left\langle y_i \ge 0, i = \overline{1,m} \right\rangle, \qquad (5)$$

які перетворюють кожну нерівність (2) у рівняння –

$$\left(\pm y_i\right) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ \ i = \overline{1,m}, \qquad (6)$$

де знак ($+y_i$) відповідає нерівності (2) типу $(\le)$,
і знак ($-y_i$) – нерівності (2) типу $(\ge)$;

по-друге, перетворити (якщо це потрібно) задачу на максимум цільової функції (ЦФ) в задачу на мінімум ЦФ зміною знаку складових на протилежний –

$$\max_{\{X\}} L(X) = \min_{\{X\}}\left[-L(X)\right] = \min_{\{X\}} R(X). \qquad (7)$$

Прискорена симплекс-процедура ЛП потребує надання лінійних рівнянь системи обмежень (6) та мінімізованої функції (7) в стандартній формі –

$$y_i = (\pm b_i) - \left(\pm\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right),\ i = \overline{1,m}; \qquad (8)$$

$$L(X) = (c_0) - \left(-\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right). \qquad (9)$$

Якщо у i-й нерівності (2) вільний член b_i менш лівої частини, то в стандартній формі (8) його знак змінюється на протилежний. Введемо для ЦФ допоміжний вектор

$$G = \left\langle g_j = -c_j, j = \overline{1,n}\right\rangle \qquad (10)$$

для зручності симплекс-перетворень; лінійна форма ЦФ при цьому буде мати вигляд

$$L(X) = c_0 - \sum_{j=1}^{n} g_j x_j. \qquad (11)$$

Алгебра адаптованої (прискореної) процедури вирішення при цьому полягає у наступному.

Обирається, як початкове наближення, крайнє припустиме значення кортежу вектора "вільних" змінних –

$$X = \left\langle x = 0_j, j = \overline{1,n}\right\rangle; \qquad (12)$$

тоді значення кортежу вектора додаткових ("базисних") змінних системи обмежень –

$$\left\langle y_i = b_i,\ i = \overline{1,m}\right\rangle \qquad (13)$$

і лінійна форма ЦФ –

$$L(X) = 0. \qquad (14)$$

Якщо у вектора G деякий r-й елемент кортежу $g_r > 0$, то поточний вектор шуканих змінних X може бути "покращений", тобто значення лінійної форми L(X) може бути зменшене збільшенням "вільної" змінної $x_r > 0$, оскільки

$$L(X) = c_0 - (g_r x_r). \qquad (15)$$

Але неконтрольоване збільшення x_r зменшує "базисні" змінні

$$y_i = b_i - a_{ir}x_r,\ i = \overline{1,m}, \qquad (16)$$

у яких коефіцієнт $a_{ir} < 0$. Тому знайдемо для цієї "вільної" змінної крайнє значення x_r^{max},
яке перетворює кожну "базисну" змінну у крайнє припустиме (невід'ємне) значення –

$$y_i = b_i - a_{ir}\left(x_r^{max}\right)_i = 0,\ i = \overline{1,m}. \qquad (17)$$

Таким чином, із (17) отримаємо –

$$\left(x_r^{m}\right)_i = (b_i / a_{ir}),\ i = \overline{1,m}. \qquad (18)$$

Остаточно знайдемо єдине припустиме значення "вільної" змінної x_r для збереження усіх додаткових змінних невід'ємними, при якому деяка (s-на) "додаткова" змінна дорівнюватиме нулю –

$$x_r = \min_i\left(x_r^{max}\right)_i = \min_i(b_i / a_{ir}) = (b_s / a_{sr}). \qquad (19)$$

Серед декількох таких значень x_r обираємо єдине, для якого "темп зменшення" ЦФ, як поточний напрямок її антиградієнту (адаптація до "динамічної ефективності" змінних), буде максимальний (щодо прискорення ітераційної процедури)

$$\max_{j\subset\{r\}}\left(g_j \times x_r^{max}\right) = -\mathrm{grad}L(X). \qquad (20)$$

Тепер поточний (на даній k-й ітерації покращення) вектор (рішення) –

$$X_k = \left\langle x_1 = 0,\ldots,x_{r-1} = 0, x_r = \frac{b_s}{a_{sr}}, x_{r+1} = 0,\ldots x_n = 0\right\rangle, \qquad (21)$$

і нове значення лінійної форма ЦФ –

$$L(X_k) = c_0 - g_r\left(\frac{b_s}{a_{sr}}\right) < L(X_{k-1}) = c_0. \qquad (22)$$

Таким чином, із кортежу "вільних" змінних поточного вектору виводиться (стає відмінною від нуля) x_r і вводиться в "базисні" змінні замість змінної y_s, яка перетворюється в 0 і виводиться з "базису" у "вільні" змінні кортежу поточного вектора.

"Обмін" змінних $x_r \leftrightarrow y_s$ припускає наступні алгебраїчні перетворення. Оскільки

$$y_s = b_s - \left(a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sr}x_r + \ldots + a_{sn}x_n\right), \qquad (23)$$

то звідси значення "нових" базисної та вільної змінної відповідно –

$$\left(x_r^{max}\right)_s = \frac{b_s}{a_{sr}} - \left(\frac{a_{s1}}{a_{sr}}x_1 + \ldots + \frac{1}{a_{sr}}x_r + \ldots + \frac{a_{sn}}{a_{sr}}x_n\right), \qquad (24)$$
$$\left(y_s\right)_r = 0$$

решти $(i \ne s)$ базисних змінних –

$$y_i = \left(b_i - b_s\frac{a_{ir}}{a_{sr}}\right) - \left\{\begin{array}{l}\left(a_{i1} - a_{s1}\dfrac{a_{ir}}{a_{sr}}\right)x_1 + \ldots\\ +\left(-\dfrac{a_{ir}}{a_{sr}}\right)x_r + \ldots\\ +\left(a_{in} - a_{sn}\dfrac{a_{ir}}{a_{sr}}\right)x_n\end{array}\right\}, i = \overline{1,m}, \qquad (25)$$

і лінійної форми ЦФ –

$$L(X_k) = \left(c_0 - b_s\frac{g_r}{a_{sr}}\right) - \left\{\begin{array}{l}\left(g_1 - g_r\dfrac{a_{s1}}{a_{sr}}\right)x_1 + \ldots\\ +\left(-\dfrac{g_r}{a_{sr}}\right)x_r + \ldots\\ +\left(g_n - g_r\dfrac{a_{sn}}{a_{sr}}\right)x_n\end{array}\right\}, i = \overline{1,m}. \qquad (26)$$

Формули (22)–(25) надають усі основні правила перерахунку елементів векторів B,G і
матриці системи

$$A = \left\|a_{ij}\right\|_{m\times n}. \qquad (27)$$

Так, "нові" значення (операція "присвоювання"):

“генерального” елемента матриці

$$a_{sr} := (1/a_{sr}); \qquad (28)$$

елементів “генерального” (r-го) стовпчика матриці A –

$$a_{ir} := -a_{ir} \times a_{sr},\ i = \overline{1,m},\ i \neq s; \qquad (29)$$

елементів вектора G –

$$g_r := -g_r \times a_{sr},\ g_j := g_j \times a_{sj}, j = \overline{1,n}, j \neq r; \qquad (30)$$

решти ($i \neq s, j \neq r$) елементів матриці A –

$$\left\| a_{ij} := a_{ij} + a_{ir} \times a_{sj} \right\|_{m \times n}; \qquad (31)$$

елементів вектору B –

$$b_s := b_s \times a_{sr},\ b_i := b_i - a_{ir} \times b_s, i = \overline{1,m}, i \neq s; \qquad (32)$$

вільного члену лінійної форми ЦФ –

$$c_o := c_o - b_s \times g_r; \qquad (33)$$

елементів “генерального” рядка матриці A –

$$a_{sj} := a_{sj} \times a_{sr}, j = \overline{1,n}, j \neq s. \qquad (34)$$

Після перерахунку усіх масивів продовжується аналогічно ітераційна процедура покращення поточного рішення, поки усі значення коефіцієнтів лінійної форми ЦФ не стануть від’ємними. Це означатиме, що після K ітерацій поточний вектор X є таким, що не може бути покращений, тобто оптимальним.

При цьому :

вектор змінних, які стали (в результати обміну) “вільними” –

$$\left\langle x_j^o := 0, j = \overline{1,n} \right\rangle; \qquad (35)$$

вектор змінних, які стали (в результати обміну) “базисними” –

$$\left\langle y_i^o := b_i, i = \overline{1,m} \right\rangle; \qquad (36)$$

мінімум лінійної форми ЦФ –

$$L(X^o) := c_o. \qquad (37)$$

При виборі “опорного” рішення – початкового наближення (12) – може статися, що деяка “базисна” змінна вектору (13), що дорівнює своєму вільному члену, буде від’ємною, наприклад –

$$y_s = -b_s - \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_{sj} \times 0 \right\rangle = -b_s, \qquad (38)$$

що не відповідатиме критерію “припустимості” рішення. Тому припустиме рішення ще потрібно знайти збільшенням “вільних” змінних.

Якщо серед коефіцієнтів *s*-ї стрічки матриці системи $(a_{s1},...,a_{sn})$ існує хоча б єдиний $a_{sr} > 0$, то збільшенням вільної змінної x_r можна “довести” від’ємну “базисну” змінну до свого найменшого припустимого значення – нуля

$$y_s = -b_s - (-a_{sr} \times x_r) = 0; \qquad (39)$$

при цьому, очевидно, x_r може зрости до максимального значення –

$$\left(x_r^{max}\right) = \frac{-b_s}{-a_{sr}} > 0. \qquad (40)$$

При цьому рішення

$$X = \left\langle (x_1 = 0),..., \left(x_r = \frac{-b_s}{-a_{sr}} \right),...,(x_n = 0) \right\rangle, \qquad (41)$$

$$Y = \left\langle (y_1 = b_1),...,(y_s = 0),...,(y_m = b_m) \right\rangle \qquad (42)$$

вже буде припустимим, бо усі змінні невід’ємні.

Відмітимо, що “перехід” до припустимого рішення здійснюється за допомогою тієї ж ітераційної процедури, що ї при покращенні поточного припустимого рішення, але при цьому “генеральним” стає від’ємний елемент ($-a_{sr}$) матриці A, і обмінюються “базисна” змінна y_s та “вільна” змінна x_r. Якщо для від’ємної змінної y_s не існує жодного від’ємного коефіцієнта $-a_{sj}, j = \overline{1,n}$, то припустимого рішення для даної задачі взагалі не існує, бо цільова функція не обмежена областю припустимих рішень “знизу” (в напрямку анти-градієнта).

2. Чисельний приклад вирішення “прямої” задачі планування комбінованого ВУ адаптованим симплекс-методом

Нехай при плануванні вогневого ураження об’єктів противника 2-х класів (аеродроми базування ударної авіації T1 та стартові позиції оперативно-тактичних ракет T2) можуть бути застосовані наступні системи зброї:

S1 – бомбардувальна авіація (БА);

S2 – балістичні оперативно-тактичні ракети (БР);

S3 – штурмова авіація (ША).

Вихідні дані для планування ВУ “комбінованими” ударами сил бомбардувальної і штурмової авіації та ракетних військ оперативного угруповання надані в таблиці 1.

Таблиця 1

Вихідні дані для задачі планування ВУ

Системи зброї (по видах)	Вартість 1 р.о.	Наявний склад засобів ВУ (р.о.)	Склад ударної тактичної групи (р.о.)	
			для 1 цілі класу T1	для 1 цілі класу T2
S1 (БА)	z_1=4	b(1)= 13 (ланок)	a(1,1)=2	a(1,2)=1
S2 (БР)	z_2=1	b(2)=15 (ракет)	a(2,1)=0	a(2,2)=3
S3 (ША)	z_3=3	b(3)=18 (ланок)	a(3,1)=3	a(3,3)=0
Оперативно-тактична важливість 1 типової цілі (од.отв)			c(1)=7	c(2)=5

Спосіб нанесення ударів по об’єктах (цілях) ударними тактичними групами сил:

цілі класу T1 – придушення ППО силами ША (протирадіолокаційні ракети, бомбардування позицій ЗРК та ЗАК прикриття цілей), ураження стоянок літаків та КП на аеродромах силами БА (бомбардуванням);

цілі класу T2 – ураження КП БРК силами БА (ракети “повітря-поверхня”), ураження позицій ОТР силами РВ (балістичними ракетами) оперативного угруповання.

Потрібно скласти оптимальний план нанесення не менш 3 комбінованих вогневих ударів по цілях класів T1 і T2, який максимізує сумарні збитки об'єктам вогневого ураження в умовах обмежень щодо наявного складу засобів систем зброї. Кожний комбінований удар тактичної групи даної спеціалізації наноситься по відповідній єдиній цілі обраного класу.

Планом ВУ (комбінованими ударами) системи різнорідних цілей вважатиме вектор

$$X = \left\langle x_j, j = \overline{1,n} \right\rangle, \tag{43}$$

де x_j – кількість ударів по цілях класу T_j (кількість уражених цілей даного класу).

Таким чином, для формальної постановки задачі відомі (таблиця 1):

1) наявний склад (запас) засобів ВУ та їх питома вартість (по видах систем зброї)–

$$B = \left\langle (b_1 = 13), (b_2 = 15), (b_3 = 18) \right\rangle; \quad Z = \left\langle (z_1 = 4), (z_2 = 1), (z_3 = 3) \right\rangle; \tag{44}$$

1) оперативно-тактична важливість об'єктів ВУ –

$$C = \left\langle (c_1 = 7),\ (c_2 = 5) \right\rangle; \tag{45}$$

2) матриця потрібних витрат різнорідних засобів ВУ $A = \|a_{ij}\|_{m\times n} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{Vmatrix}$, тобто $A_1 = \begin{Vmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{Vmatrix}$, $A_2 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{Vmatrix}$,(46)

де m – кількість видів систем зброї ВУ (m=3);

n – кількість класів типових цілей ВУ (n=2);

a_{ij} – кількість засобів i-го виду, що входить у склад ударної групи для цілі j-го класу;

3) обмеження на значення кортежу припустимого вектора-рішення надаються наступними лінійними нерівностями:

по наявному складу (запасу) засобів ВУ за видами систем зброї –

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{1,m}; \tag{47}$$

по потрібній кількості комбінованих ударів (загальній кількості цілей ВУ) –

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \ge XS^{\text{потр}}; \tag{48}$$

4) цільова функція (бойовий ефект), що надається лінійною формою –

$$WS(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j. \tag{49}$$

На множині планів $\{X\}$ нанесення ВУ, кожний з котрих (43) задовольняє обмеження (47),(48), необхідно знайти такий (оптимальний) план

$$X^o = \left\langle x_j^o, j = \overline{1,n} \right\rangle,\ X^o \subset \{X\}, \tag{50}$$

котрий максимізує цільову функцію (49) –

$$WS(X^o) = \max_{\{X\}} WS(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^o. \tag{51}$$

Для умов даної задачі маємо:

система обмежень-нерівностей для наявного складу (запасу) засобів ВУ –

$$\left.\begin{array}{lll} 2x_1 & +1x_2 & \le 13 \\ 0x_1 & +3x_2 & \le 15 \\ 3x_1 & +0x_2 & \le 18 \end{array}\right\}; \tag{52}$$

обмеження-нерівність для потрібної кількості ударів –

$$1x_1 \quad +1x_2 \quad \ge 3. \tag{53}$$

Цільова функція (лінійна форма) –

$$W(X) = 7x_1 + 5x_2. \tag{54}$$

Вирішуємо задачу симплексним методом лінійного програмування (Данцига), адаптованим до "динамічної ефективності" змінних. Перейдемо до стандартної форми "основної" задачі лінійного програмування (ЛП) з обмеженнями-рівняннями та мінімумом цільової функції.

Введемо нову цільову функцію –

$$-L(X) = W(X);\ \max_{\{X\}} W(X) = \min_{\{X\}} L(X). \tag{55}$$

Введемо додаткові ("базисні") змінні $Y = \left\langle y_i, i = \overline{1,m} \right\rangle$ для перетворення систем нерівностей (52), (53) в систему лінійних рівнянь –

$$\begin{array}{lllll} y_1 & +2x_1 & +1x_2 & =13 \\ y_2 & +0x_1 & +3x_2 & =15 \\ y_3 & +3x_1 & +0x_2 & =18 \\ -y_4 & +1x_1 & +1x_2 & =3. \end{array} \tag{56}$$

Представимо цільову функцію та рівняння-обмеження в стандартній формі –

$$\begin{array}{llll} L(X) = & 0- & (7x_1 & +5x_2) \\ y_1 = & 13- & (2x_1 & +1x_2) \\ y_2 = & 15- & (0x_2 & +3x_2) \\ y_3 = & 18- & (3x_1 & +0x_2) \\ y_4 = & -3- & (-1x_1 & -1x_2). \end{array} \tag{57}$$

Початковим (опорним) рішенням, таким чином, обрано "представницьку" точку $X = \langle 0,0 \rangle$, коли "вільні" змінні дорівнюють своєму найменшому припустимому невід'ємному значенню – нулю.

Заповнюємо розрахункову симплекс-таблицю для 1-ї ітерації. Значення елементів розширеної матриці системи (подвійна рамка) та коефіцієнтів лінійної форми ЦФ записані у верхньому лівому куту кожної клітини таблиці 2.

Опорне рішення (вектори X,Y) –

$$\begin{pmatrix} x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ y_1 = 13, \\ y_2 = 15,\ y_3 = 18,\ y_4 = -3 \end{pmatrix}$$

не є припустимим, бо $y_4 < 0$. Знайдемо припустиме рішення, для якого значення кортежів векторів X,Y невід'ємні.

У стрічці y_4 обираємо "генеральним" елемент $a_{sr} = \min_i (b_i / a_{ir}) = a_{42} = -1$, виводимо у "вільні" з "базисних" змінну (y_4), вводимо у "базисні" "вільну" змінну (x_2) і перераховуємо симплекс-таблицю згідно формул (28)-(34) (табл. 2).

Нові значення елементів надані у правому нижньому куту кожної клітини таблиці. Елементи генерального рядка ("старі") та генерального стовпчика ("нові"), що фігурують у формулах обчислення елементів розширеної матриці системи та лінійної форми цільової функції, виділені сірим кольором.

Таблиця 2

Ітерація 1	Вільні члени	x_1=0	$\mathbf{x_2}$=0 ↑ ↓ $\mathbf{y_4}$
L	0 –15	g1=7 –5	g_2=5 5
y_1	13 –3	2 –1	1 1
y_2	15 –9	0 –3	3 3
y_3	18 0	3 0	0 0
$\mathbf{y_4}$ → ← $\mathbf{x_2}$	–3 3	–1 1	–1 –1

Одержимо наступну симплекс-таблицю 3 для 2-ої ітерації.

Таблиця 3

Ітерація 2	Вільні члени	x_1	$\mathbf{y_4}$ ↑ ↓ $\mathbf{y_2}$
L	–15 –10	g_1=2 5	g_2=5 –5/3
y_1	10 –2	1 1	1 –1/3
$\mathbf{y_2}$ → ← $\mathbf{y_4}$	6 2	–3 –1	3 1/3
y_3	18 0	3 0	0 0
x_2	3 2	1 -1	–1 –1

Таким чином, нова “представницька” точка має компоненти $X = \langle 0,3 \rangle$, при яких поточне рішення стає припустимим. Цільова функція має значення L(X)= –15.

Оскільки у стрічці L усі коефіцієнти $g_1, g_2 > 0$, то дане поточне рішення може бути покращене.

Обираємо “генеральний” елемент

$$a_{sr} = \min_i (b_i / a_{ir}) = a_{22} = 3$$

обмінюємо “базисну” y_2 та “вільну” y_4 змінні й перераховуємо симплекс-таблицю згідно формул (28)-(34). Одержимо наступну симплекс-таблицю 4 для 3-ої ітерації.

Таблиця 4

Ітерація 3	Вільні члени	$\mathbf{x_1}$ ↑ ↓ $\mathbf{y_1}$	y_2
L	–25 –28	g_1=7 –7/2	g_2=–5/3 7/6
$\mathbf{y_1}$ → ← $\mathbf{x_1}$	8 4	2 1/2	-1/3 –1/6
y_4	2 4	–1 1/2	1/3 –5/6
y_3	18 –12	3 –3/2	0 1/2
x_2	5 0	0 0	1/3 0

Таким чином, нова “представницька” точка має компоненти $X = \langle 0,5 \rangle$, для якої значення ЦФ L(X)= –25. Оскільки у стрічці L існує коефіцієнт g_1>0 , то дане поточне рішення також може бути покращене.

Обираємо “генеральний” елемент $a_{sr} = \min_i (b_i / a_{ir}) = a_{11} = 2$ обмінюємо “базисну” y_1 та “вільну” x_1 змінні й перераховуємо симплекс-таблицю згідно формул (28)-(34).

Одержимо наступну симплекс-таблицю 5 (“оптимальне рішення”):

Оскільки у стрічці L усі коефіцієнти g при вільних змінних від’ємні, то поточне рішення покращити вже не можна, тобто воно є оптимальним –

$$X^o = \langle x_1^o = 4,\ x_2^o = 5 \rangle . \quad (58)$$

Таблиця 5

Оптимальне рішення	Вільні члени	$y_1=0$	$y_2=0$
L	–53	$g_1=-7/2$	$g_2=-1/2$
x_1	4	–	–
y_4	6	–	–
y_3	6	–	–
x_2	5	–	–

Оскільки у стрічці L усі коефіцієнти g при вільних змінних від'ємні, то поточне рішення покращити вже не можна, тобто воно є оптимальним –

$$X^o = \left\langle x_1^o = 4,\ x_2^o = 5 \right\rangle. \qquad (58)$$

Таким чином, дане рішення означає наступне: силами ВУ повинні бути уражені 4 цілі типу Т1 та 5 цілей типу Т2 (загалом 9);
очікуваний максимальний бойовий ефект –

$$WS = -L = 53 \text{ од. ефекту}; \qquad (59)$$

статок боєзапасу по видах систем зброї –

$$y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 6 \text{ р.о. засобів}; \qquad (60)$$

кількість додатково уражених цілей (понад потрібних 3-х) $y_4 = 6$.

3. "Обернена" задача планування ВУ як задача ЛП

"Пряма" задача розподілу ресурсу по об'єктах у воєнному мистецтві є другорядною, бо головною задачею є "обернена" (мінімізація витрат ресурсу на досягнення потрібного рівня ефекту). Надамо постановку "оберненої" задачі.

Для формальної постановки задачі повинні бути відомі наступні її атрибути.

1) Запас засобів ВУ по видах систем зброї –

$$B = \left\langle b_i, i = \overline{1,m} \right\rangle. \qquad (61)$$

2) Оперативно-тактична важливість об'єктів ВУ –

$$C = \left\langle c_j, j = \overline{1,n} \right\rangle. \qquad (62)$$

3) Матриця потрібних питомих витрат різнорідних засобів ВУ (виділена в таблиці 1) –

$$A = \left\| a_{ij} \right\|_{m\times n}, \qquad (63)$$

де m – кількість видів систем зброї ВУ;
n – кількість класів типових цілей ВУ;
a_{ij} – кількість засобів i-го виду, що входить у склад ударної групи для цілі j-го класу.

4) Обмеження на значення кортежу припустимого вектора-рішення, які надаються наступними лінійними нерівностями:

по наявному складу (запасу) засобів ВУ по видах систем зброї –

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ i = \overline{1,m}; \qquad (64)$$

по потрібному рівню бойового ефекту, що надається лінійною формою –

$$WS(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ge WS^{потр}. \qquad (65)$$

5) Цільова функція кількості комбінованих ударів (загальній кількості цілей ВУ) –

$$NS(X) = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j, \qquad (66)$$

де умовні "витрати" (вартість) засобів на 1 удар по об'єкту кожного класу при вартості 1 р.о. засобів i-го типу ($z_i, i = \overline{1,m}$) –

$$d_j = \sum_{i=1}^{m} (a_{ij} \times z_i), j = \overline{1,n}. \qquad (67)$$

На множині планів {X} нанесення ВУ, кожний з котрих X задовольняє обмеження (64),(65), необхідно знайти такий (оптимальний) план

$$X^o = \left\langle x_j^o, j = \overline{1,n} \right\rangle,\ X^o \subset \{X\}, \qquad (68)$$

котрий мінімізує цільову функцію (66) –

$$NS(X^o) = \min_{\{X\}} NS(X) = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j^o. \qquad (69)$$

"Обернена" задача відрізняється від "прямої" тим, що цільовою функцією стає значення витрат різнорідних засобів ВУ, а потрібний бойовий ефект – основним обмеженням.

Оскільки рішенням задачі є вектор двох змінних $X = \langle x_1, x_2 \rangle$, то вирішуємо дану задачу ЛП графічним методом, де "несучою" (через не від'ємність змінних) є координатна двомірна площина $x_1 0 x_2$ першого квадранту (рис.1).

Побудуємо область припустимих рішень (ОПР) за допомогою обмежень, заданих системою нерівностей (52); одержимо систему еквівалентних"напівплощин" на несучій координатній площин і –

$$\left.\begin{aligned} y_1 &: (2x_1 + 1x_2 \le 13) \\ y_2 &: (0x_1 + 3x_2 \le 15) \\ y_3 &: (3x_1 + 0x_2 \le 18) \end{aligned}\right\} \qquad (70)$$

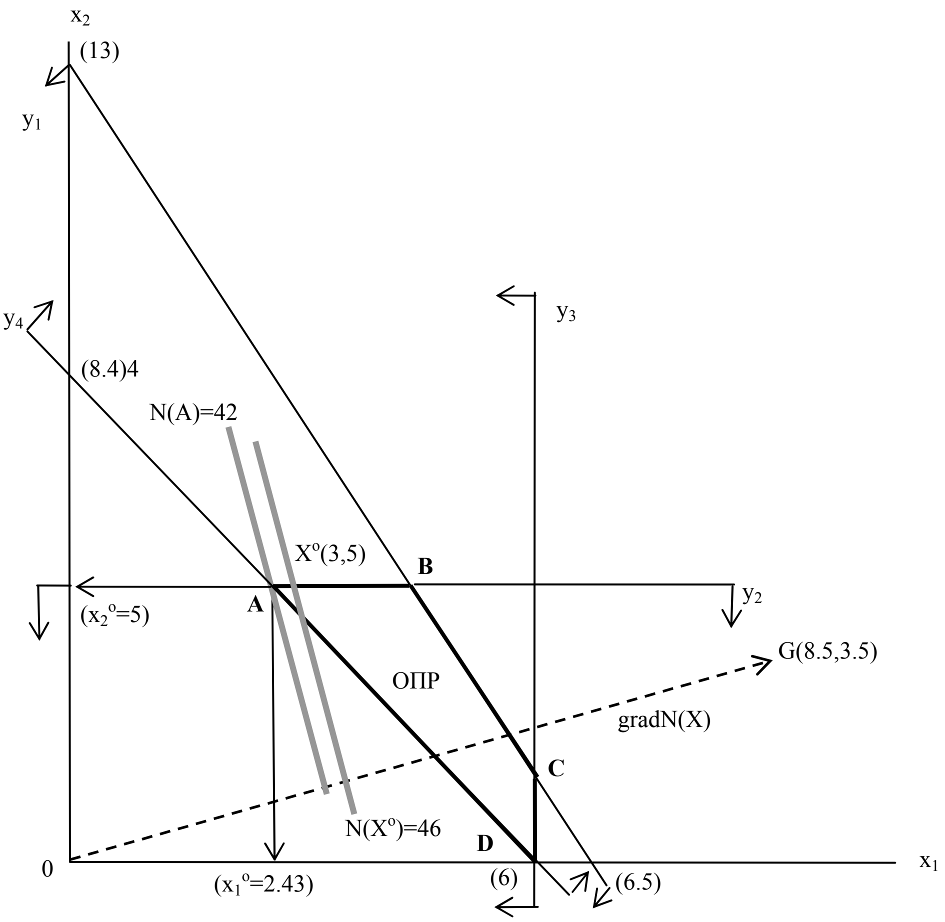

Рис.1. Вирішення оберненої задачі ВУ графічним методом ЛП

Вважаючи не суворі нерівності рівняннями ("межами"), одержимо графіки прямих y_1, y_2, y_3, що є саме межами напівплощин, яким, очевидно, належить точка початку координат (0,0); вони помічені стрілками. Дійсно, при підстановці значень ($x_1=0, x_2=0$) в ліву частину системи нерівностей (70) вони виконуються, тобто точка початку координат належить кожній напівплощині. Призначаємо потрібний рівень бойового ефекту $WS^{потр}=42$ (од.ефекту); тоді додаткове обмеження (65) –

$$y_4 : (7x_1 \quad +5x_2 \quad \geq 42)\ . \qquad (71)$$

Строїмо графік прямої y_4 , що є межею напівплощини, яка помічена стрілками. Дійсно, при підстановці значень ($x_1=0, x_2=0$) в ліву частину нерівності (71) вона не виконується, тобто точка початку координат не належить даній напівплощині.

Частина координатної площини, яка одночасно належить усім напівплощинам обмежень, і є областю припустимих рішень (ОПР) – симплексом ABCD (показаний жирними лініями). "Рішенням" задачі є саме одна з вершин симплексу (ОДР).

Користуючись таблицею вихідних даних задачі, обчислимо за допомогою (67) коефіцієнти цільової функції (66), яка "мінімізується" –

$$NS(X) = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j = 17x_1 + 7x_2\ . \qquad (72)$$

Знайдемо проекції вектора-градієнта на координатні вісі ($0x_1, 0x_2$) –

$$\mathrm{grad}N(X) = \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_1}, \frac{\partial N}{\partial x_2} \right\rangle = \left\langle (17),(7) \right\rangle . \qquad (73)$$

Для зручності відображення даного вектора-градієнта на рис.1 координати його "кінця" зменшені навпіл, тобто точка G має координати (17/2,7/2). Побудований з початку координат в точку G(8.5,3.5) вектор-градієнт є "нормаллю" до прямої, що надає рівні значення цільової функції (показана сірим кольором).

Оптимальним рішенням є така вершина ОДР, для якої лінія ЦФ, що через неї проходить, найменш віддалена від початку координат у напрямку градієнта; очевидно, саме такою вершиною є А. Таким чином, координати точки А дають оптимальне рішення задачі –

$$X^o = \left\langle (x_1^o = 2.43), (x_2^o = 5) \right\rangle . \qquad (74)$$

Оскільки по фізичному змісту кожна змінна *x* (кількість цілей, чи комбінованих ударів по них) є цілочисельною, то точне цілочисельне рішення шукається ітераційним методом "гілок і меж". Це – найближча до (74) "припустима" точка (з цілочисельними координатами), яка належить початковій ОПР, тобто точка $X^o = \left\langle (x_1^o = 3), (x_2^o = 5) \right\rangle$, що належить межі AB

ОПР. Мінімум цільової функції в цілочисельній точці оптимуму $X^{o}(3,5)$ складе –

$$N(X^{o}) = 17\times 3 + 7\times 5 = 86 \text{ од. витрат,}$$

і бойовий ефект –

$$WS(X^{o}) = 7\times 3 + 5\times 5 = 46 > 42 \text{ од. ефекту,}$$

що є умовою коректності одержаного рішення.

Вирішення обох задач планування ВУ у наданій постановці максимізує бойову ефективність сил по застосуванню засобів. Дійсно: для "прямої" задачі –

$$ES(X^{o}_{пр}) = WS(X^{o}_{пр})/NS(X^{o}_{пр}) = \\ = \max_{\{X\}} WS(X) / NS^{прип} = \max_{\{X\}} ES(X); \qquad (75)$$

для "оберненої" задачі –

$$ES(X^{o}_{об}) = WS(X^{o}_{об})/NS(X^{o}_{об}) = \\ = WS^{потр} / \min_{\{X\}} NS(X) = \max_{\{X\}} ES(X). \qquad (76)$$

4. Алгоритмізація процедури адаптованого симплекс-методу для СМіПЗ інформаційно-розрахункової системи АСУВ(с)

Надамо розроблений адаптований алгоритм процедури перерахунку симплекс-таблиці на кожній ітерації процесу покращення поточного рішення.

В тексті алгоритму позначене:

n – кількість шуканих змінних задачі;

m – кількість нерівностей-обмежень задачі;

x(n) – масив (вектор) шуканих змінних;

g(n) – масив (вектор) коефіцієнтів лінійної форми цільової функції (ЦФ);

y(m) – масив (вектор) змінних рівнянь-обмежень

b(m) – масив (вектор) вільних членів рівнянь-обмежень

a(m,n) – масив (матриця) коефіцієнтів нерівностей-обмежень

s – індекс "генеральної" стрічки розширеної матриці системи;

r – індекс "генерального" стовпчика розширеної матриці системи;

a(s,r) – "генеральний" елемент матриці коефіцієнтів a(m,n);

c – поточне екстремальне значення лінійної форми ЦФ.

Текст алгоритму даної процедури (на мові публікацій) містить наступні оператори (жирним шрифтом надані "ключові слова" операторів:

```
smplx  початок
        ком(ентар) процедура перерахунку
симплекс-таблиці
        ком обмін "вільної" та "базисної" змінних
        u:=x(r)
        v:=y(s)
        x:(r)=v
        y:(s)=u
        ком нове значення генерального елементу
        a(s,r):=1/a(s,r)
        ком нове значення елементу генерального
стовпчика у ЦФ
        g(r):= –g(r)*a(s,r)
        ком нове значення елементів матриці "a"
та вільного члену "b"
            генеральної стрічки
        цикл i від 1 до m
            якщо i=s то перехід до m1
            a(i,r):= –a(i,r)*a(s,r)
            b(i):=b(i)+a(i,r)*b(s)
m1      кінець i
        ком нове значення вільного члену лінійної
форми ЦФ
        c:=c+b(s)*g(r)
        ком нове значення коефіцієнтів лінійної
форми ЦФ та решти
            коефіцієнтів матриці системи
        цикл j від 1 до n
            якщо j:=r то перехід до m3
            g(j):=g(j)+g(r)*a(s,j)
            цикл i від 1 до m
                якщо i=s то перехід до m2
                a(i,j):=a(i,j)+a(i,r)*a(s,j)
m2          кінець i
            a(s,j):=a(s,j)*a(s,r)
m3      кінець j
        ком нове значення вільного члену
генеральної стрічки
        b(s):=b(s)*a(s,r)
        кінець smplx
        повернення
```

Дана процедура "smplx" входить, як головна підпрограма, у основну програму вирішення задачі ітераційним адаптивним симплекс-методом. Звернення з основної програми до процедури "smplx" здійснюється після визначення індексів "генерального елементу" a(s,r) симплекс-таблиці на кожній ітерації процесу. По виконанні перерахунку симплекс-таблиці процедура повертає управління в "точку" звернення до неї від основної програми.

Працездатність та основні властивості даного алгоритму – масовість, детермінованість та результативність – перевірені на контрольних прикладах при вирішенні задачі ЛП на комп'ютерних засобах. Підтверджена висока ефективність та простота реалізації алгоритму в програмному забезпеченні комп'ютерних засобів автоматизованого управління бойовими системами [3].

Висновки й перспективи подальших досліджень

Таким чином, розглянутий адаптивний метод пошуку припустимого та оптимального рішення задачі ЛП з комбінованим аргументом, як формальної моделі задачі планування ВУ комбінованими ударами сил авіації, ракетних військ та артилерії оперативного угруповання військ (сил), придатний для реалізації в спеціальному математичному і програмному забезпеченні інформаційно-розрахункової системи АСУ військами (силами).

Література

1. Вентцель Е. С. Введение в исследование операций. М. : Высшая школа, 1980. – 320 с. **2. Педченко Г. М.**, Невольніченко А. І., Шарий В. І. Воєнно-наукове забезпечення операцій військ (сил). Монографія. МО України, видання Військового інституту Київського Національного Університету імені Тараса Шевченка, К.: 2011. – 340 с. **3. Невольніченко А. І.** Ефективність автоматизованого управління військами (силами). Монографія. Київ, ВІ КНУ імені Тараса Шевченка, 2013. – 355 с.

АДАПТАЦИЯ МЕТОДА ДАНЦИГА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ПЛАНИРОВАНИЯ КОМБИНИРОВАННОГО ОГНЕВОГО ПОРАЖЕНИЯ

Владимир Иванович Шарый ***(д-р воен. наук, профессор, ведущий научный сотрудник центра)***[1]
Анатолий Иванович Невольниченко ***(канд. техн наук, с.н.с., ведущий научный сотрудник центра)***[1]
Алексей Петрович Федченко ***(канд. воен. наук, начальник научно-исследовательского отдела)***[2]
Максим Георгиевич Тищенко ***(канд. техн. наук, научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории)***[2]

[1]***Военный институт Киевского национального университета имени Тараса Шевченка, Киев, Украина***
[2]***Национальный университет обороны Украины имени Ивана Черняховского, Киев, Украина***

В статье рассматривается содержательная и формальная постановка "прямой" и "обратной" задач планирования огневого поражения разнородных классов целей методом комбинированных ударов силами бомбардировочной и штурмовой авиации и ракетных войск оперативной группировки. Для решения задач данного класса, как "типичных" задач целоцисленного линейного программирования, предоставляется версия симплексного метода Данцига при векторном аргументе целевой функции и функций-ограничений, которая адаптирована к "динамической эффективности" текущего решения. Не целочисленное решение приводится к целочисленному методом "ветвей и границ" по принципу "ближайшей допустимой точки". Приводится численный пример решения прямой и обратной задачи и алгоритм компьютерной процедуры "симплекс-преобразование", что реализует данный метод, для специального математического и программного обеспечения АСУВ (с). Показано, что решение прямой (второстепенной) или обратной (основной) задачи максимизирует эффективность решения-плана комбинированного огневого поражения.

Ключевые слова: *комбинированный удар, прямая и обратная задача, целочисленное линейное программирование, динамическая эффективность текущего решения, симплекс-процедура, метод Данцига*

DANZIG METHOD ADAPTATION FOR SOLVING OPTIMIZATION TASKS OF PLANNING COMBINED FIRE DAMAGE

Volodymyr I. Sharyi ***(Doctor of Military Sciences, Professor, Leading Research Fellow of a Center)***[1]
Anatolii I. Nevolnychenko ***(Candidate of Technical Sciences, Senior Research Fellow, Leading Research Fellow of a Center)***[1]
Oleksii P. Fedchenko ***(Candidate of Military Sciences, Chief of a Research Section)***[2]
Maksym H. Tyshchenko ***(Candidate of Technical Sciences, Research Fellow of a Research Laboratory)***[2]

[1]***Military Institute of Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv, Ukraine***
[2]***National Defence University of Ukraine named after Ivan Cherniakhovsky, Kyiv, Ukraine***

The article considers the substantive and formal statement of "direct" and "inverse" planning tasks of fire damage of heterogeneous targets classes by combined strikes method by task group bomber and ground attack aircraft and missile forces. To solve this class problems as "typical" integral linear programming problems, the version of the simplex Danzig method under vector argument of the objective function and constraints functions is given, which is adapted to the "dynamic efficiency" of the current solution. The no integer solution is converted to the integer by the "branch and bound" method on the principle of "nearest feasible point". The numerical example of solving direct and inverse task and the algorithm of "simplex transformation" computer procedures is given that implements this method for special mathematical and software of an automated command and control system (ACCS). It is shown that the solution of the direct (secondary) or inverse (main) task maximizes the decision-plan efficiency of combined fire damage.

Keywords: *combined strike, direct and inverse task, integer linear programming, dynamic efficiency of the current solution, simplex procedure, Danzig method.*

References

1. Wentzel E. (1980), Introduction to Exploration operations. [*Vvedenie v issledovanie operatsiy*], Vyisshaya shkola, Moscow, 320 p. **2. Pedchenko G.,** Nevolnichenko A., Shary V. (2011), Military and scientific support operations troops (forces). Monograph. [*Voienno-naukove zabezpechennia operatsii viisk (syl). Monohrafiia*], MO Ukrainy, vydannia Viiskovoho instytutu Kyivskoho Natsionalnoho Universytetu imeni Tarasa Shevchenka, Kyiv, 340 p. **3. Nevolnichenko A.** (2013), The effectiveness of automated control of troops (forces). Monograph [*Efektyvnist avtomatyzovanoho upravlinnia viiskamy (sylamy). Monohrafiia*], vydannia Viiskovoho instytutu Kyivskoho Natsionalnoho Universytetu imeni Tarasa Shevchenka, Kyiv, 355 p.

V.I. Sharyi: sharyi@i.ua A.I. Nevolnichenko: eagle-falcon@rambler.ru O.P.Fedchenko: fedcheap@ukr.net M.H. Tyshchenko: tishenkom@ukr.net
Отримано: 23.05.2014 р.