

Юрій Васильович Кравченко (д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри)¹

Михайло Юрійович Ракушев (канд. техн. наук, с.н.с., докторант)²

Євген Олександрович Судніков (науковий співробітник науково-дослідної лабораторії)²

Ігор Віталійович Ушаков (науковий співробітник відділу)²

¹Державний університет телекомунікацій, Київ, Україна

²Національний університет оборони України імені Івана Черняхівського, Київ, Україна

ЕФЕКТИВНІСТЬ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ СХЕМ ІНТЕГРУВАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НА ОСНОВІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ТЕЙЛОРІВСЬКИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Наводяться теоретичні оцінки ефективності явних обчислювальних схем числового розв'язку задачі Коші для звичайного диференціального рівняння, які розроблені на основі диференціально-тейлорівських перетворень, у порівнянні зі схемами, які розроблені на основі методу Адамса за схемою предиктор-коректор. Ефективність обчислювальних схем оцінюється через порівняння необхідних обчислювальних витрат при забезпеченні заданої точності розрахунку. На основі отриманих оцінок розроблені практичні рекомендації щодо ефективного застосування методу диференціально-тейлорівських перетворень для числового інтегрування звичайних диференціальних рівнянь. Показано, що загальна ефективність методу диференціально-тейлорівських перетворень зростає, при збільшенні необхідної точності інтегрування (зменшення локальної похибки інтегрування) звичайного диференціального рівняння.

Ключові слова: диференціально-тейлорівські перетворення, задача Коші, обчислювальна схема.

Вступ

Постановка проблеми. У багатьох практичних задачах виникає необхідність розв'язку задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР). Безпосередній розв'язок такої задачі проводиться одним із числових методів інтегрування ЗДР шляхом розробки відповідної обчислювальної схеми інтегрування.

Слід зазначити кілька особливостей предмету числових методів інтегрування ЗДР. По-перше, для числових методів характерна множинність, тобто можливість розв'язати туж саму задачу різними методами. По-друге, нові природничо-наукові задачі та швидкий розвиток обчислювальної техніки змушує переоцінювати значення існуючих обчислювальних схем і приводить до створення нових [1].

Одним з можливих підходів до числового розв'язку задачі Коші для ЗДР є використання методу диференціально-тейлорівських (ДТ) перетворень. Цей, відносно новий метод, доповнює існуючий арсенал числових методів інтегрування ЗДР, і в багатьох практичних задачах розроблені на його основі обчислювальні схеми мають кращі характеристики в порівнянні з існуючими (відомими) [2, 3].

У самому загальному випадку, якість числового методу інтегрування ЗДР та, відповідно, розробленої на його основі обчислювальної схеми, можна оцінити за узагальненим показником "точність-обчислювальна складність". Достовірні оцінки за цим показником отримуються, при порівнянні результатів розв'язку (типового, або

декількох різнотипових) ЗДР, різними обчислювальними схемами розробленими на основі досліджуваних числових методів [4].

Вищезазначені оцінки, є практичними (апостеріорними), залежать від виду ЗДР, і відповідно, будуть змінюватися від однієї (типовий) практичної задачі до іншої. Поряд з "апостеріорними" оцінками, бажаним, є обґрунтування обчислювальної ефективності числового методу, яке не прив'язане до конкретного типу ЗДР, іншими словами, одержання теоретичних (апостеріорних) оцінок.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В якості узагальненого показника "точність-обчислювальна складність", насамперед, при розробці адаптивних за кроком та (або) порядком обчислювальних схем інтегрування ЗДР, використовується показник – необхідні обчислювальні витрати схеми, при забезпеченні заданої точності інтегрування [4].

На теперішній час, найбільш відомими й розповсюдженими числовими методами інтегрування ЗДР є кінцево-різницеві методи Адамса і Рунге-Кутта [1, 4, 5].

У [2, 3] розглядається завдання апостеріорного порівняння обчислювальної ефективності явних обчислювальних схем інтегрування ЗДР, які розроблені на основі ДТ-перетворень та схем розроблених на основі методів Адамса і Рунге Кутта та зроблено висновок, що ДТ-перетворення є перспективними для задач невеликої розмірності, які потребують високої точності рішення (похибки порядку 10^{-9} - 10^{-12}), а також для ЗДР високих

степенів. Наведено кількісні оцінки щодо порівняння порядків та величин кроків досліджуваних обчислювальних схем.

Із самих загальних міркувань, теоретично (апріорно) найкращу обчислювальну ефективність щодо необхідних обчислювальних витрат на одержання результату з необхідною (заданою) точністю мають методи Адамса, при їх застосуванні за схемою предиктор-коректор [1].

Мета статті. На теперішній час відсутні теоретичні (апріорні) оцінки ефективності явних схем інтегрування ЗДР на основі ДТ-перетворень у порівнянні з відомими (класичними) числовими методами інтегрування ЗДР.

Виходячи із вищевикладеного, метою статті є отримання апріорної оцінки ефективності обчислювальних схем інтегрування ЗДР на основі ДТ-перетворень у порівнянні із класичними (традиційними) кінцево-різницевиими числовими методами інтегрування ЗДР – методами Адамса.

Виклад основного матеріалу дослідження

Задача Коши для ЗДУ має вигляд

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u), \quad t > 0, \quad u(t=0) = u_0, \quad (1)$$

де $u(t)$ – шукана функція; t – незалежна змінна; u_0 – початкова умова; $f(t, u)$ – задана вектор-функція, безперервно диференційована за t та u .

Без втрати узагальненості подальших викладок введемо обчислювальну сітку з постійним кроком

$$\omega_n = \{nh, n = 0, 1, 2, \dots\}, \quad (2)$$

де h – крок обчислювальної сітки.

Обчислювальна схема інтегрування (1) розроблена на основі методу Адамса, у якій початкове наближення обчислюється за явною формулою та уточнюється за неявною формулою – метод предиктор-коректор, має вигляд (вважатимемо, що метод предиктор-коректор забезпечує необхідну точність рішення нелінійного рівняння яким є формула неявного методу Адамса) [1, 4, 5]

$$t_0 = 0, t_n = nh, \quad u_{n+1}^* = u_n + h \sum_{k=1}^m b_k^* f_{n+1-k}, \quad (3)$$

$$u_{n+1} = u_n + h \sum_{k=0}^m b_k f_{n+1-k},$$

де b_k^*, b_k – задані коефіцієнти методу Адамса явного та неявного відповідно; u_n^*, u_n – початкове наближення та розраховане (уточнене) значення сіткової функції, прийнятої за розв'язок (1) на ω_n відповідно; m – кількість стадій методу.

Використання (3) дозволяє послідовно (починаючи з) $n = m$ одержати розв'язок (1) – визначити на ω_n значення сіткової функції, яке приймається за наближення шуканої функції (1)

$$u(t_n) \approx u_n. \quad (4)$$

У точне рішення (1), на кожному кроці обчислювальної сітки (2), при розрахунку на основі (3) вноситься похибка, оцінити яку можливо шляхом визначення похибки апроксимації схеми. Зазначена похибка отримується підстановкою точного розв'язку ЗДР (1) у різнищеве рівняння обчислювальної схеми (3). Цей матеріал широко викладений у літературі, на його основі виводяться значення коефіцієнтів методу Адамса. Похибка апроксимації схеми (3) (визначається неявною формулою) має вигляд [1; 4; 5]

$$\Psi_{n+1}^{AD} = \frac{1}{h} E_m \frac{h^{m+2}}{(m+2)!} u^{(m+2)}(t_n) + O(h^{m+2}), \quad (5)$$

$$\text{при } E_m = -1 + (m+2) \left(b_0 + \sum_{k=2}^m [b_k (1-k)^{m+1}] \right),$$

де Ψ_{n+1}^{AD} – похибка апроксимації неявного методу Адамса; E_m – заданий (відомий) коефіцієнт; $O(h^{m+2})$ – величина відповідного порядку малості при $h \rightarrow 0$.

Перший член в (5) є головним членом асимптотичного розкладу похибки апроксимації схеми. Порядок точності схеми (3), дорівнює порядку її похибки апроксимації $\gamma_{AD} = m + 1$ [1]. Зведені дані щодо оцінки значення похибки апроксимації методу Адамса наведені у табл. 1, де γ_{AD} – порядок точності схеми; m – кількість стадій методу.

Таблиця 1

Характеристика головного члену асимптотичного розкладу похибки апроксимації неявного методу Адамса

$\gamma_{AD} = m + 1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$E_{m=\gamma_{AD}-1}$	0,5	1	3,17	$1,35 \cdot 10^1$	$7,19 \cdot 10^1$	$4,58 \cdot 10^2$	$3,40 \cdot 10^3$	$2,86 \cdot 10^4$	$2,71 \cdot 10^5$	$2,84 \cdot 10^6$

ДТ-перетвореннями називають функціональні перетворення вигляду [6; 7]

$$Z(k) = \frac{h^k}{k!} \left[\frac{d^k z(t)}{dt^k} \right]_{t_*} = \frac{h^k}{k!} z^{(k)}(t_*), \quad (6)$$

$$z(t) \approx \sum_{k=0}^{k_{\max}} \left(\frac{t-t_*}{h} \right)^k Z(k), \quad (7)$$

де t – аргумент, за яким проводиться перетворення; t_* – значення аргументу, при якому проводиться перетворення;

h – відрізок аргументу, на якому розглядається функція $z(t)$;

k – цілочисловий аргумент $k = 0, 1, \dots$; $Z(k)$ – дискретна функція за аргументом k ;

k_{\max} – максимальний номер враховуваної при відновленні T -дискрети.

Вираз (6) визначає пряме перетворення, що дозволяє за оригіналом $z(t)$ знайти зображення $Z(k)$. Обернене перетворення, що відновлює оригінал $z(t)$ у вигляді часткової суми (відрізка) ряду Тейлора, визначається виразом (7). Множину значень $Z(k)$ прийнято називати T -спектром, а значення функції $Z(k)$ при конкретних значеннях аргументу k – дискретами T -спектру або T -дискретами.

Явна обчислювальна схема інтегрування ЗДР (1) на (2) розроблена на основі (6), (7) (далі явна ДТ-схема) має вигляд [6; 7]

$$\begin{cases} U_n(k=0) = u_n, U_0(k=0) = u_0, t_0 = 0, t_n = nh, \\ U_n(k+1) = \frac{h}{k+1} F_n(k, U_n(k)), \end{cases} \quad (8)$$

при $k = 0, \dots, k_{\max} - 1$,

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{k_{\max}} U_n(k), \quad (9)$$

де u_n – сіткова функція, прийнята за розв'язок (1) на ω_n ; $U_n(k), F_n(k, U_n(k))$ – T -спектри розв'язку (1), правої частини ЗДР (1) на ω_n відповідно; h – крок обчислювальної сітки ω_n за незалежною змінною ЗДР; k_{\max} – максимальний номер враховуваної при відновленні T -дискрети.

Використання (8), (9) дозволяє послідовно (починаючи з $n=0$) одержати розв'язок (1) – визначити на ω_n значення сіткової функції, яке приймається за наближення шуканої функції (4).

Схема (8), (9) на кожному кроці (2) вносить у точне рішення (1) похибку, оцінити яку можливо (аналогічно методу Адамса) шляхом визначення похибки апроксимації схеми. Зазначена похибка отримується підстановкою точного розв'язку ЗДР (1) у різницеве рівняння обчислювальної схеми (8), (9). Похибка апроксимації явної ДТ-схеми має вигляд [7]

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}^{DTP} &= \\ &= \frac{1}{h} \frac{h^{k_{\max}+1}}{(k_{\max}+1)!} u^{(k_{\max}+1)}(t_n) + O(h^{k_{\max}+1}), \end{aligned} \quad (10)$$

де ψ_{n+1}^{DTP} – похибка апроксимації явної ДТ-схеми.

Перший член в (10) є головним членом асимптотичного розкладу похибки апроксимації схеми. Порядок точності явної ДТ-схеми (8), (9), дорівнює порядку її похибки апроксимації $\gamma_{DTP} = k_{\max}$ [7].

Аналіз похибок апроксимації неявного методу Адамса (3) і явної ДТ-схеми (8), (9) показує, що при рівних порядках точності

$$\gamma = \gamma_{DTP} = \gamma_{AD} \Rightarrow \gamma = k_{\max} = m + 1, \quad (11)$$

метод ДТ-перетворень має значно меншу похибка на одному кроці інтегрування.

На основі оцінок похибок апроксимації обчислювальних схем (5), (10) визначимо повні локальні похибки розглянутих схем $\varepsilon_{n+1}^{DT(AD)}$ (ця похибка є нев'язкою, внесеної на кожному кроці інтегрування в точний розв'язок ЗДР (1) – $u(t)$)

$$\varepsilon_{n+1}^{DTP(AD)} = h_{DTP(AD)} \psi_{n+1}^{DTP(AD)}. \quad (12)$$

де $\varepsilon_{n+1}^{DTP(AD)}$ – повна локальна похибка схеми; $h_{DTP(AD)}$ – крок інтегрування обчислювальної схеми.

З (12) визначимо швидкості зміни (збільшення) повних локальних похибок розглянутих схем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1}'^{AD} &= \frac{d(h_{AD} \psi_{n+1}^{AD})}{dh_{AD}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \varepsilon_{n+1}'^{AD} &= E_{\gamma_{AD}-1} \frac{h_{AD}^{\gamma_{AD}}}{\gamma_{AD}!} \left| u^{(\gamma_{AD}+1)}(t_n) \right|, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1}'^{DTP} &= \frac{d(h_{DTP} \psi_{n+1}^{DTP})}{dh_{DTP}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \varepsilon_{n+1}'^{DTP} &= \frac{h_{DTP}^{\gamma_{DTP}}}{\gamma_{DTP}!} \left| u^{(\gamma_{DTP}+1)}(t_n) \right|, \end{aligned} \quad (14)$$

де $\varepsilon_{n+1}'^{DTP(AD)}$ – швидкості зміни повної локальної похибки схеми.

Визначимо співвідношення довжин кроків кожної з схем, при якому забезпечується однакові абсолютні значення швидкості зміни повної локальної похибки (13), (14) для схем одного порядку точності (11)

$$\left| \varepsilon_{n+1}'^{AD} \right| = \left| \varepsilon_{n+1}'^{DTP} \right| \Rightarrow \quad (15)$$

$$\begin{aligned} E_{\gamma-1} \frac{h_{AD}^{\gamma}}{\gamma!} \left| u^{(\gamma+1)}(t_n) \right| &= \frac{h_{DTP}^{\gamma}}{\gamma!} \left| u^{(\gamma+1)}(t_n) \right| \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{h_{DTP}}{h_{AD}} &= \left(E_{\gamma-1} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \end{aligned} \quad (16)$$

де h_{DTP}, h_{AD} – крок явної ДТ-схеми та методу Адамса відповідно; γ – порядок точності схем.

Необхідно відзначити наступне:

1. При числовому розв'язку ЗДР адаптивними обчислювальними схемами (адаптація за кроком і (або), порядком), для реалізації адаптації на кожному кроці розглядається підтримка заданого значення повної локальної похибки інтегрування (12), або її відносного значення [4; 7]. Якщо застосувати такий підхід, то замість (15) необхідно розглядати $\left| \varepsilon_{n+1}^{AD} \right| = \left| \varepsilon_{n+1}^{DTP} \right|$. Однак, схема методу Адамса буде вимагати проведення більшої кількості кроків інтегрування на кожному з яких,

потенційно, вноситься постійна похибка, таким чином, повна похибка інтегрування цієї схеми буде більшою чим у ДТ-схемі. Використання виразу (15) прирівнює швидкості наростання похибок і тому позбавлене від описаного вище недоліку;

2. У [4] пропонують для порівнювання швидкостей наростання похибок схем

використовувати вираз $\left| \varepsilon_{n+1}^{AD} \right| h_{AD}^{-1} = \left| \varepsilon_{n+1}^{DTP} \right| h_{DTP}^{-1}$, однак він дуже грубо апроксимує розглянуту залежність і тому його використання недоцільне.

У табл. 2 наведені розрахунки на підставі (16), де γ – порядок точності схем; h_{DTP}/h_{AD} – співвідношення кроків явної ДТ-схеми та методу Адамса.

Таблиця 2

Співвідношення кроків інтегрування обчислювальних схем

$\gamma = k_{max} = m + 1$	2	3	4	5		6	7	8	9	10	11
h_{DTP}/h_{AD}	0,71	1,00	1,33	1,69		2,04	2,4	2,76	3,13	3,49	3,86

Аналіз даних табл. 2 показує, що для забезпечення однакової швидкості зміни повної локальної похибки інтегрування на одиницю кроку, для обчислювальних схем одного порядку точності явною ДТ-схемою потрібно робити більші кроки, у порівнянні з обчислювальною схемою на основі методу Адамса.

Зазначений результат пояснюється наступним чином, явна ДТ-схема реалізує інтегрування ЗДУ на основі ряду Тейлора. Виходячи з того, що вона враховує кінцеву кількість Т-дискрет (котрі тотожні членам ряду Тейлора), у точне значення шуканої функції вноситься похибка, яка визначається неврахованим (відкинутим) відрізком ряду Тейлора. В якості асимптотичної оцінки відкинутого відрізка ряду приймається його перший (старший) член. В методі Адамса теж розглядається відрізок ряду Тейлора, але який апроксимується інтерполяційним поліномом мінімальної степені. Це призводить до того, що до похибки, яка сформована за рахунок використання відрізка ряду Тейлора (“обрізання” нескінченного ряду) додатково додається похибка інтерполяції. Результируюча похибка оцінюється з використанням коефіцієнту $E_m \geq 1$ (табл. 1).

Далі проведемо оцінку обчислювальної складності явної ДТ-схеми (8), (9). Дану оцінку визначимо через кількість елементарних арифметичних дій (множень і ділень) у вузлі обчислювальної сітки ω_n (на одному кроці схеми). Зазначена кількість арифметичних дій визначається їх кількістю для проведення прямого ДТ-перетворення (6), тобто для розрахунків Т-спектру правої частини ЗДР (8). Запропонований підхід подібний визначенню обчислювальної складності кінцево-різницевих методів інтегрування ЗДР, через підрахунок кількості обчислення правої частини ЗДР, необхідних для реалізації відповідного методу [1, 4, 5].

Розглянемо базову операцію методу ДТ-перетворень в області зображень – операцію алгебраїчної згортки, яка є ДТ-зображенням математичної операції множення для області оригіналів [6, 7]:

$x(t) \cdot y(t)$ – область оригіналів,

$$X(k) * Y(k) = \sum_{d=0}^k X(d)Y(k-d) \text{ – область зображень, (17)}$$

де $x(t), y(t), X(k), Y(k)$ – функції в області оригіналів і їх ДТ-зображення відповідно;

* – операція алгебраїчної згортки.

Пряме ДТ-перетворення правої частини в (8) проводиться, при $k = 0, \dots, k_{max} - 1$. При кожному k , кількість множення для однієї операції алгебраїчної згортки відповідно до (17) буде рівно $k + 1$. Таким чином, загальна кількість множень для однієї операції алгебраїчної згортки визначається як сума арифметичної прогресії у вигляді

$$S(k_{max}) = \sum_{k=0}^{k_{max}-1} (k+1) = \frac{1}{2} k_{max} (k_{max} + 1). \quad (18)$$

Опираючись на властивості ДТ-перетворень, можна показати, що оцінка (18) буде виконуватися і для операції ділення.

Якщо в праву частину ЗДР (1) входить w операцій множення та ділення, тоді оцінка загальної обчислювальної складності (8) з врахуванням (18) буде рівною

$$S_{DTP}(k_{max}) = wS(k_{max}) = w \frac{1}{2} k_{max} (k_{max} + 1), \quad (19)$$

де S_{DTP} – оцінка обчислювальної складності явної ДТ-схеми.

Проведемо оцінку обчислювальної складності методу Адамса (3). Реалізація (3) потребує проведення в одному вузлі обчислювальної сітки ω_n (на одному кроці схеми) двох обчислень правої частини ЗДР (1) (перше – для явного Адамса, друге – для неявного). Спираючись на (18) та (19) можна затверджувати, що кількість елементарних арифметичних дій (множень і ділень) у вузлі обчислювальної сітки ω_n для однократного розрахунку правої частини ЗДР рівно $wS(k_{max} = 1)$. Таким чином, загальна оцінка обчислювальної складності (3) рівна

$$S_{AD} = 2w. \quad (20)$$

де S_{AD} – оцінка обчислювальної складності методу Адамса.

Аналіз обчислювальної складності неявного методу Адамса (20) і явної ДТ-схеми (19) показує, що при рівних порядках точності схем (11), метод ДТ-перетворень вимагає значно більших обчислювальних витрат на один крок інтегрування.

Зрівняємо розглянуті обчислювальні схеми одного порядку точності (11) за показником – необхідні обчислювальні витрати на одиницю кроку інтегрування, при забезпеченні заданої швидкості зміни повної локальної похибки (13), (14). Для цього скористаємося (16), (19), (20)

$$s_{AD}^{DTP}(\gamma) = \frac{S_{DTP}(\gamma)}{h_{DTP}} \left(\frac{S_{AD}}{h_{AD}} \right)^{-1} \Rightarrow \Rightarrow s_{AD}^{DTP}(\gamma) = \frac{\gamma(\gamma+1)}{4} (E_{\gamma-1})^{-\frac{1}{\gamma}}, \quad (21)$$

де s_{AD}^{DTP} – відношення необхідних обчислювальних витрат на одиницю кроку інтегрування, при забезпеченні заданої точності

інтегрування ЗДУ для явної ДТ-схеми та неявного методу Адамса; γ – порядок точності порівнюваних обчислювальних схем.

Залежність (21) показує, у скільки раз більших обчислювальних витрат потребує розв'язок ЗДР (1) явною ДТ-схемою у порівнянні з схемою методом Адамса, при забезпеченні однакової точності інтегрування.

Результати розрахунків на основі (21) наведено у табл. 3, де γ – порядок точності схем; s_{AD}^{DTP} – відношення необхідних обчислювальних витрат на одиницю кроку інтегрування, при забезпеченні заданої точності інтегрування ЗДУ явною ДТ-схемою та методом Адамса.

Таблиця 3

Відношення обчислювальних витрат числових схем інтегрування ЗДР при забезпеченні однакової точності

$\gamma = k_{max} = m + 1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
s_{AD}^{DTP}	2,12	3,00	3,75	4,46	5,15	5,83	6,52	7,19	7,87	8,54

Аналіз даних з табл. 3 показує, при однаковому порядку точності обчислювальних схем інтегрування ЗДР (1) метод Адамса, у порівнянні з явною ДТ-схемою, за необхідними обчислювальними витратами є більш ефективним.

На даному етапі розгляду, необхідно звернути увагу на наступне. Однією з основних властивостей обчислювальних схем розв'язку ЗДР (особливо систем ЗДР) на основі методу Адамса, є погіршення характеристик стійкості таких схем зі збільшенням їх порядку точності, що накладає значні обмеження на крок інтегрування. Це приводить до того, що схеми вище 8-11 порядків точності майже не використовуються на практиці. Явна ДТ-схема має іншу властивість – чим вище порядок точності схеми, тем краще характеристики її стійкості. При цьому, на практиці використовуються явні ДТ-схеми до 15-20 порядків точності.

Узагальнені результати щодо стійкості обчислювальних схем для модельного рівняння [1] які проілюстровані на рис. 1

$$\frac{du(t)}{dt} = \lambda u(t), \quad t > 0, \quad u(t=0) = u_0,$$

де λ – довільне комплексне число.

Таким чином, допускається використовувати ДТ-схеми дещо більшого порядку точності ніж у методі Адамса і, як наслідок, виникає необхідність порівняння вищезазначених схем різних порядків точності.

Для одержання оцінок за описаним вище варіантом, припустимо, що ЗДР (1) у вузлі обчислювальної сітки t_n із прийнятною точністю можна замінити на ЗДР першого наближення [1]

$$\frac{du(t)}{du} = \lambda u_n(t) + O(u_n(t)^2) \approx \lambda u(t), \quad (22)$$

$$u(t_n) = u_n, \quad t > t_n,$$

де $\lambda = \frac{\partial f(t, u(t))}{\partial u_n(t)}$ – частинна похідна.

Для (22) у вузлі обчислювальної сітки ω_n виконується співвідношення [1]

$$u^{(k)}(t_n) = \lambda^k u(t_n). \quad (23)$$

Аналогічно викладенням з отримання (16), визначимо довжину кроку обчислювальних схем методу Адамса порядку точності γ_{AD} , при якому забезпечується задане значення швидкості зміни повної локальної похибки (13)

$$\varepsilon'_{n+1} = \left| \varepsilon'_{n+1} \right| \Rightarrow \varepsilon'_{n+1} = E_{\gamma_{AD}-1} \frac{h_{AD}^{\gamma_{AD}}}{\gamma_{AD}!} \left| u^{(\gamma_{AD}+1)}(t_n) \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon'_{n+1} = E_{\gamma_{AD}-1} \frac{h_{AD}^{\gamma_{AD}}}{\gamma!} \left| \lambda^{\gamma_{AD}+1} u(t_n) \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon'_{n+1} = E_{\gamma_{AD}-1} \frac{h_{AD}^{\gamma_{AD}}}{\gamma_{AD}!} \left| \lambda \right|^{\gamma_{AD}+1} \left| u(t_n) \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_{AD} = \frac{1}{|\lambda|} \left(\frac{\gamma_{AD}!}{E_{\gamma_{AD}-1}} \right)^{\frac{1}{\gamma_{AD}}} \frac{1}{\theta^{\frac{1}{\gamma_{AD}}}},$$

$$\text{при } \theta = \frac{\varepsilon'_{n+1}}{\left| u(t_n) \right| |\lambda|}, \quad (24)$$

де ε'_{n+1} – задане абсолютне значення швидкості зміни повної локальної похибки інтегрування;

θ – характеристика обчислювальної схеми та ЗДР.

Розглянемо введenu характеристику θ . Відповідно до (12)-(14) має місце залежність

$$\varepsilon'_{n+1} = (\gamma + 1) \frac{\varepsilon_{n+1}}{h},$$

де ε_{n+1} – задане абсолютне значення повної локальної похибки інтегрування.

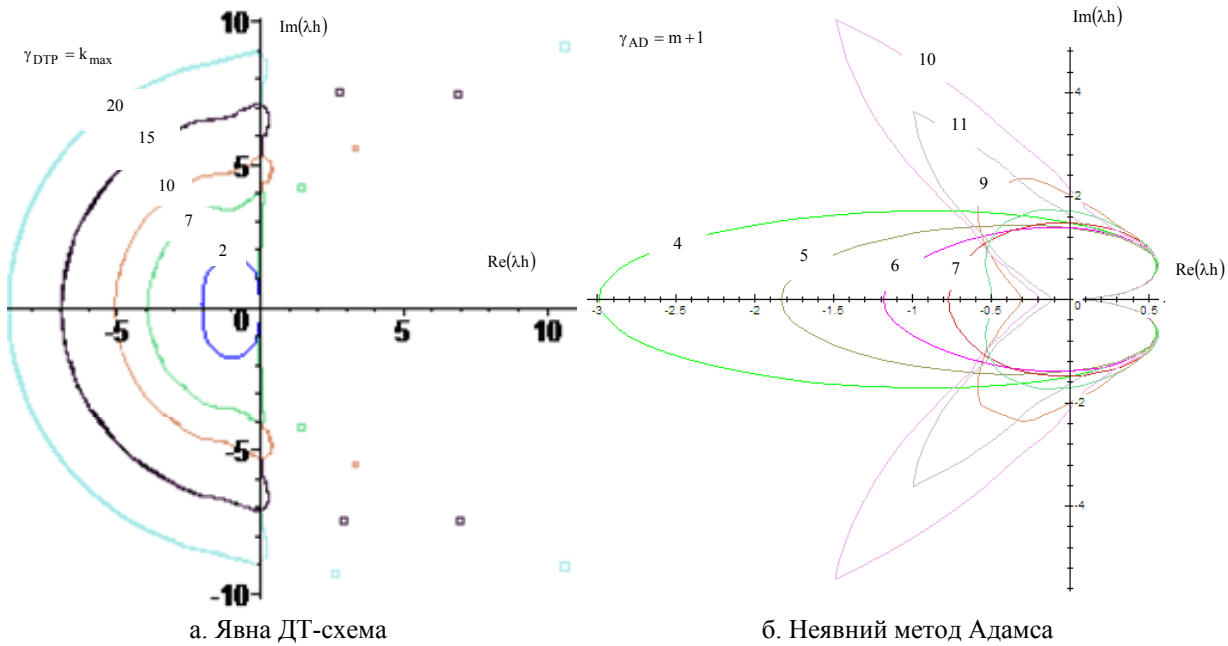


Рис. 1. Области абсолютної стійкості обчислювальних схем

Розглянемо введену характеристику θ . Відповідно до (12)-(14) має місце залежність

$$\varepsilon'_{n+1} = (\gamma + 1) \frac{\varepsilon_{n+1}}{h},$$

де ε_{n+1} – задане абсолютне значення повної локальної похибки інтегрування.

З урахуванням останнього виразу запишемо

$$\theta = \frac{\varepsilon'_{n+1}}{|u(t_n)| |\lambda|} = (\gamma + 1) \frac{\varepsilon_{n+1}}{h |u(t_n)| |\lambda|} = \frac{\varepsilon_{n+1}}{|u(t_n)|} \frac{\gamma + 1}{h |\lambda|}.$$

Останнє вираз містить дві складові:

перша – $\varepsilon_{n+1}/|u(t_n)|$, яка характеризує обчислювальну схему і являє собою задану відносну локальну похибку інтегрування, на відміну від абсолютної – ε_{n+1} (12). На практиці, для інтегрування ЗДР приймають $10^{-11} \leq \varepsilon_{n+1}/|u(t_n)| \leq 10^{-1}$;

друга – $(\gamma + 1)/(h|\lambda|)$, яка характеризує обчислювальну схему та ЗДР. На рис. 1 наведені характеристики зі стійкості схем. Виходячи зі значення порядку точності схеми – γ і задоволення вимог зі стійкості – значення параметру $h|\lambda|$, має місце оцінка $10^{-1} \leq (\gamma + 1)/(h|\lambda|) \leq 10^2$. При цьому, отримана оцінка виконується як для методу Адамса так і для ДТ-схеми.

З врахуванням вищевикладеного визначальним у порядку величини θ є задане (необхідне) значення відносної локальної похибки інтегрування ЗДР, тому θ характеризує точність інтегрування ЗДР та, на практиці, може приймати значення

$$10^{-12} \leq \theta \leq 10^3. \quad (25)$$

З врахуванням (20), (24) визначимо для методу Адамса характеристику, яка показує обчислювальну ефективність схем різних порядків, а саме, необхідні обчислювальні витрати на одиницю кроку інтегрування, при забезпеченні заданої точності розв'язку ЗДР

$$\frac{S_{AD}}{h_{AD}} = 2w \left[\frac{1}{|\lambda|} \left(\frac{\gamma!}{E_{\gamma-1}} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \theta^{\frac{1}{\gamma}} \right]^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{S_{AD}}{h_{AD}} = 2w |\lambda| \left(\frac{E_{\gamma-1}}{\gamma!} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \theta^{-\frac{1}{\gamma}},$$

$$\text{при } \theta = \frac{\varepsilon'_{n+1}}{|u(t_n)| |\lambda|}. \quad (26)$$

Використовуючи підхід з отримання (24) визначимо для явної ДТ-схеми порядку точності γ_{DTP} довжину кроку, при якому забезпечується задане значення швидкості зміни повної локальної похибки (14)

$$\varepsilon'_{n+1} = \left| \varepsilon'_{n+1} \right| \Rightarrow \varepsilon'_{n+1} = \frac{h^{\gamma_{DTP}}}{\gamma_{DTP}!} \left| u^{(\gamma_{DTP}+1)}(t_n) \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon'_{n+1} = \frac{h^{\gamma_{DTP}}}{\gamma_{DTP}!} \left| \lambda^{\gamma_{DTP}+1} u(t_n) \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_{DTP} = \frac{1}{|\lambda|} (\gamma_{DTP}!)^{\frac{1}{\gamma_{DTP}}} \theta^{\frac{1}{\gamma_{DTP}}},$$

$$\text{при } \theta = \frac{\varepsilon'_{n+1}}{|u(t_n)| |\lambda|}. \quad (27)$$

З врахуванням (19), (27), визначимо для явної ДТ-схеми необхідні обчислювальні витрати на

одиницю кроку інтегрування, при забезпеченні заданої точності розв'язку ЗДР

$$S_{DTP}(\gamma_{DTP}) = \frac{w|\lambda|}{2} \gamma_{DTP}(\gamma_{DTP} + 1) \left(\frac{1}{\gamma_{DTP}!} \right)^{\gamma_{DTP}} \theta^{-\frac{1}{\gamma_{DTP}}},$$

при $\theta = \frac{\varepsilon'_{n+1}}{|u(t_n)||\lambda|}$. (28)

На основі (26) визначимо порядок схеми інтегрування ЗДР методом Адамса, яка має найкращі обчислювальні характеристики виходячи із критерію мінімуму обчислювальних витрат на одиницю кроку інтегрування, за умови стійкості схеми – γ_{AD}^* . З врахуванням того, що постійні члени не впливають на положення екстремуму значену залежність можна записати у вигляді:

$$\gamma_{AD}^* = \arg \min_{2 \leq \gamma_{AD} \leq 11} \left\{ \left(\frac{E_{\gamma_{AD}-1}}{\gamma_{AD}!} \right)^{\frac{1}{\gamma_{AD}}} \theta^{-\frac{1}{\gamma_{AD}}} \right\},$$

при $\theta = \frac{\varepsilon'_{n+1}}{|u(t_n)||\lambda|}$. (29)

Для явної ДТ-схеми ефективною схемою буде

$$\gamma_{DTP}^* = \arg \min_{1 \leq \gamma_{DTP} \leq 20} \left\{ \gamma_{DTP}(\gamma_{DTP} + 1) \left(\frac{1}{\gamma_{DTP}!} \right)^{\gamma_{DTP}} \theta^{-\frac{1}{\gamma_{DTP}}} \right\},$$

при $\theta = \frac{\varepsilon'_{n+1}}{|u(t_n)||\lambda|}$. (30)

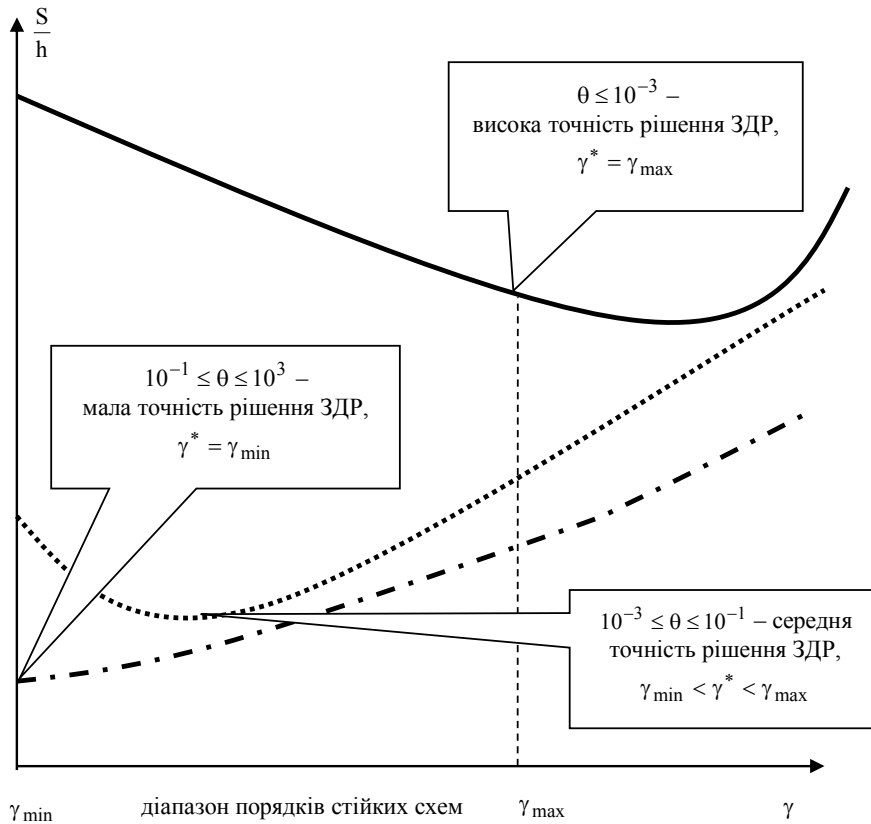


Рис. 2. Вибір порядку схеми з найкращими обчислювальними характеристиками

Загальний характер змін (26), (28) і відповідно значень (29), (30) показаний на рис. 2. Наведені дані узгоджуються з відомим результатом: найбільш ефективною для розв'язку ЗДР з малою точністю є схема з невеликим (малим) порядком точності, а для розв'язку ЗДР з високою точністю – з великим порядком [4, 7].

На основі (26), (28), проведемо порівняння явної ДТ-схеми та методу Адамса різних порядків точності за показником – необхідні обчислювальні витрати на одиницю кроку інтегрування, при забезпеченні заданої точності (заданої швидкості зміни повної локальної похибки)

$$s_{AD}^{DTP}(\gamma_{DTP}, \gamma_{AD}) = \frac{S_{DTP}(\gamma_{DTP})}{h_{DTP}} \left(\frac{S_{AD}}{h_{AD}} \right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_{AD}^{DTP}(\gamma_{DTP}, \gamma_{AD}) = \frac{\gamma_{DTP}(\gamma_{DTP} + 1)}{4(E_{\gamma_{AD}-1})^{\gamma_{AD}}} \frac{(\gamma_{AD}!)^{\gamma_{AD}}}{(\gamma_{DTP}!)^{\gamma_{DTP}}} \theta^{\frac{1}{\gamma_{AD}} - \frac{1}{\gamma_{DTP}}},$$

при $\theta = \frac{\varepsilon'_{n+1}}{|u(t_n)||\lambda|}$, (31)

де $s_{AD}^{DTP}(\gamma_{DTP}, \gamma_{AD})$ – відношення необхідних обчислювальних витрат на одиницю кроку інтегрування, при забезпеченні заданої точності для явної ДТ-схеми та неявного методу Адамса; $\gamma_{DTP}, \gamma_{AD}$ – порядки точності обчислювальних схем.

Вираз (31), за умови (11), тотожній виразу (21).

Узагальнені результати розрахунків на основі (29), (30), (31) для точності (25) наведені в табл. 4, де γ_{AD}^* , γ_{DTP}^* – порядки схем, що мають найкращі обчислювальні характеристики (29), (30); s_{AD}^{DTP} – порівняльна ефективність схем (31); γ_{ADmax} , γ_{DTPmax} – максимальні порядки точності схем (верхня границя в (29), (30)).

У табл. 4, наведені результати для двох

варіантів:

крок інтегрування визначається не вимогами точності, а із задоволенням вимог зі стійкості схем (рис. 1), у такому випадку, необхідно обмежувати порядок використовуваного методу (особливо у методі Адамса) – стовпці із $\gamma_{ADmax} = 6$ та 8, $\gamma_{DTPmax} = 12$ та 15;

крок інтегрування визначається вимогами точності – стовпець із $\gamma_{ADmax} = 11$, $\gamma_{DTPmax} = 20$.

Таблиця 4

Обчислювальна ефективність методу Адамса і явної ДТ-схеми

θ	$\gamma_{ADmax} = 6,$ $\gamma_{DTPmax} = 12$			$\gamma_{ADmax} = 8,$ $\gamma_{DTPmax} = 15$			$\gamma_{ADmax} = 11,$ $\gamma_{DTPmax} = 20$			Рекомендації з розв'язку ЗДР
	γ_{AD}^*	γ_{DTP}^*	s_{AD}^{DTP}	γ_{AD}^*	γ_{DTP}^*	s_{AD}^{DTP}	γ_{AD}^*	γ_{DTP}^*	s_{AD}^{DTP}	
10^{-3}	2	1	0,032	2	1	0,032	2	1	0,032	для низької точності ефективні схеми з найменшим порядком
10^{-2}	2	1	0,1	2	1	0,1	2	1	0,1	
10	2	1	0,32	2	1	0,32	2	1	0,32	
1	2	1	1	2	1	1	2	1	1	
0,5	3	1	1,4	3	1	1,4	3	1	1,4	для середньої точності ефективні схеми методу Адамса і явні ДТ-Схеми з порядками, що порівнювальні між собою
0,2	6	2	2,7	6	2	2,7	6	2	2,7	
10^{-1}	6	2	3,3	8	2	3,4	11	2	3,5	
10^{-2}	6	4	4,9	8	4	5,5	11	4	6	
10^{-3}	6	6	5,1	8	6	6,4	11	6	7,5	
10^{-4}	6	9	4,8	8	9	6,5	11	9	8,3	
10^{-5}	6	11	4,1	8	11	6,2	11	11	8,5	для високої точності ефективні схеми з найбільшим порядком
10^{-6}	6	12	3,4	8	13	5,6	11	13	8,4	
10^{-8}	6	12	2,3	8	15	4,3	11	18	7,5	
10^{-10}	6	12	1,6	8	15	3,3	11	20	6,3	
10^{-12}	6	12	1,1	8	15	2,5	11	20	5,2	
10^{-15}	6	12	0,6	8	15	1,7	11	20	3,9	

Аналіз даних з табл. 4 показує:

за показником обчислювальної ефективності явна ДТ-схема у порівнянні з методом Адамса, для схем різних порядків точності має покращені характеристики, ніж при однаковому порядку (табл. 3). При цьому ДТ-схема має більший діапазон вибору порядків точності схем залежно від необхідної точності розрахунку, що характеризує її більшу гнучкість;

найбільш ефективним є використання явної ДТ-схеми для високоточного (з малою відносною похибкою на кроці інтегрування) розв'язку ЗДР;

отримані значення, при $1 \leq \theta$ з $\gamma_{DTP}^* = 1$ визначають випадок, для якого явна ДТ-схема є явним методом Ейлера, або явним методом Адамса з $m = 1$ (явна формула в (2)), таким чином, фактично порівнюється явний метод Адамса з $m = 1$ і неявний метод Адамса з $m = 1$, тому зазначені значення з розгляду слід.

На даному етапі розгляду необхідно зробити кілька критичних зауважень (відступів):

1. Вихідною основою для проведення майже усіх викладок є вирази (5), (10), що є оцінками головного члену асимптотичного розкладу похибки апроксимації у вузлі t_n , в який входить

похідна функції розв'язку ЗДР відповідного порядку визначена в цьому вузлі $u^{(\gamma+1)}(t_n)$. Надалі, використання (5), (10) багато в чому ґрунтується на рівності вищезазначених похідних для різних обчислювальних схем. Однак, точним значенням похибки апроксимації є використання залишкового члена ряду у формі Лагранжа, де значення відповідної похідної визначається (грубо кажучи), не точно у вузлі t_n , а у деякій його околиці. У такий спосіб використання (5), (10), дає досить грубі оцінки, причому, чим вище порядок методу (більше порядок похідної), тим їх точність гірша [4].

2. Зазначене у п. 1 тенденція щодо погіршення точності отриманих оцінок, ще більше підсилюється з використанням припущення (22) яке проводить лінеаризацію вихідного ЗДР (1). Так-як, записаний на його основі вираз (23), для значень похідних розв'язку ЗДР, особливо для великих порядків дає ще грубіші оцінки.

3. Для розв'язку практичних задач, при розробці адаптивних за кроком і (або) порядком обчислювальних схем розв'язку задачі Коші, у якості критерію точності використовується задане значення повної локальної похибки або її відносно

значення (про це зазначалось на початку). Цей підхід, якщо задавати однакову точність, дасть занижені розглянуті показники ефективності для ДТ-схем. Таким чином, для усунення цієї залежності необхідно задавати дещо меншу точність розв'язку ЗДР ДТ-схемою ніж в методі Адамса.

4. Для порівняння, в якості еталону, обраний метод Адамса реалізований за схемою предиктор-коректор (одне прогнозування за явною схемою і одне уточнення за неявною схемою та розв'язок нелінійного рівняння методом простої ітерації за одною ітерацією), при самих загальних припущеннях цей метод має найкращі обчислювальні характеристики. Однак, реалізований за визначеною схемою він не завжди дає задовільну точність, а саме, або потрібне більша кількість ітерацій, або необхідно застосовувати метод Ньютона для розв'язку нелінійного рівняння неявної схеми методу Адамса. Усе вищеописане знизить ефективність обчислювальної схеми методу Адамса. Таким чином, отримані порівняльні оцінки є непоказувальними для явної ДТ-схеми.

5. При оцінці похибок числових методів інтегрування ЗДР у [4] зазначається рекомендація, суть якої полягає у наступному, якщо при виводі коефіцієнтів числового методу намагаються якомога більше зменшити старший член похибки апроксимації, тоді для аналізу значення похибки цього методу слід розглядати два старші члени похибки апроксимації. Для методу Адамса, таких рекомендацій не надається, тому його похибка апроксимації оцінюється старшим членом.

Однак, на підставі введених допущень всі отримані вище результати, у самому загальному випадку, не суперечать практиці, це стосується насамперед загальної стратегії вибору порядку схеми залежно від необхідної точності розв'язку

ЗДР (рис. 2). Таким чином їх можливо використовувати на практиці.

Висновки й перспективи подальших досліджень

Отримані оцінки обчислювальної ефективності явних ДТ-схем у порівнянні з методом Адамса за схемою предиктор-коректор показують, що чим більша необхідна точність розв'язку задачі Коші для ЗДР, тим більше ефективним є застосування ДТ-перетворень.

Вперше отримані апріорні (теоретичні) оцінки обчислювальної ефективності явних обчислювальних схем числового інтегрування ЗДР у порівнянні з методом Адамса, які не прив'язані до конкретного типу ЗДР. Дані теоретичні оцінки, можна використовувати для попереднього дослідження обчислювальної ефективності зазначених схем, які потім слід апостеріорно уточнювати для конкретної практичної задачі.

Незважаючи на те, що отримані оцінки показують дещо гіршу обчислювальну ефективність ДТ-схем, ДТ-схеми мають свою нішу для розв'язку практичних задач. Так, наприклад, метод Рунге-Кутта (менш обчислювально ефективний у порівнянні з методом Адамса) має свою нішу (у силу більшої гнучкості і т.і.).

На користь використання ДТ-схем можна, додатково, відзначити їх числово-аналітичні властивості (на відміну від виключно числових для методів Адамса та Рунге-Кутта), що дає їм додаткові переваги (нові, у порівнянні із класичними числовими методами). Використання зазначених переваг дозволяє зменшити результуючу обчислювальну складність ДТ-схеми, це стосується, насамперед, розробки адаптивних схем з можливістю апріорної адаптації за кроком та (або) порядком схеми.

Література

1. Самарский А. А. Численные методы : Учеб. пособие для вузов / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 432 с. 2. Семагина Є.П. Об эффективности Т-преобразований при численном решении дифференциальных уравнений // Электронное моделирование. – 1981. – № 4. – С. 103–104. 3. Семагина Є. П. Дифференциальные преобразования и их возможности для решения задач динамики / Семагина Є. П. // Электронное моделирование, К. : 1986. – № 4. – С. 44–50. 4. Холл Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Дж. Холл, Дж. Уатт.– М. : Мир, 1979. – 321 с.

5. Хемминг Р. В. Численные методы для научных работников и инженеров / Хемминг Р. В. – М. : 1972. – 400 с. 6. Пухов Г. Е. Дифференциальные спектры и модели / Пухов Г. Е. – К. : Наукова думка, 1990.– 184 с. 7. Ракушев М. Ю. Вычислительная схема интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений на основе дифференциально-тейлоровского преобразования с автоматическим выбором шага и порядка / М. Ю. Ракушев // Международный научно-технический журнал “Проблемы управления и информатики”. – 2012. – № 6. – С. 87–96.

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СХЕМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ТЕЙЛОРОВСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Юрий Васильевич Кравченко (д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедры)¹

Михаил Юрьевич Ракушев (канд. техн. наук, с.н.с., докторант)²

Евгений Александрович Судников (научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории)²

Игорь Витальевич Ушаков (научный сотрудник отдела)²

¹Государственный университет телекоммуникаций, Киев, Украина

²Национальный университет обороны Украины имени Ивана Черняховского, Киев, Украина

Приводятся теоретические оценки эффективности явных вычислительных схем численного решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения, которые разработаны на основе дифференциально-тейлоровских преобразований, в сравнении со схемами, которые разработаны на основе метода Адамса по схеме предиктор-корректор. Эффективность вычислительных схем оценивается сравнением необходимых вычислительных затрат при обеспечении заданной точности расчёта. На основе полученных оценок разработаны практические рекомендации по эффективности применения метода дифференциально-тейлоровских преобразований для численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Показано, что общая эффективность метода дифференциально-тейлоровских преобразований возрастает, при увеличении необходимой точности интегрирования (уменьшения локальной ошибки интегрирования) обыкновенного дифференциального уравнения.

Ключевые слова: дифференциально-тейлоровские преобразования, задача Коши, вычислительная схема.

CALCULATION SCHEMES EFFICIENCY FOR INTEGRATION OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS BASED ON THE DIFFERENTIAL-TAYLOR TRANSFORMATION

Yurii V. Kravchenko (Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of a Department)¹

Mykhailo Y. Rakushev (Candidate of Technical Sciences, Senior Research Fellow, Doctoral Candidate)²

Yevhen O. Sudnikov (Research Fellow of a Research Laboratory)²

Igor V. Ushakov (Research Fellow of a Section)²

¹*State University of Telecommunications, Kyiv, Ukraine*

²*National Defence University of Ukraine named after Ivan Cherniakhovsky, Kyiv, Ukraine*

The theoretical evaluation of the effectiveness of explicit computational schemes for numerical solution of the Cauchy problem for ordinary differential equations are given, which are based on differential-taylor transformations in comparison with the schemes that have been developed on the basis of the Adams predictor-corrector scheme. The effectiveness of the computational schemes is evaluated by comparing the required computational costs while maintaining a specified accuracy of the calculation. On the basis of these estimates practical recommendations on the effectiveness of the method of differential-taylor transformations for numerical integration of ordinary differential equations. It is shown that the overall efficiency of the method of differential-taylor transformation increases with an increase in the required accuracy of integration (reducing local integration error) ordinary differential equation.

Keywords: differential-taylor transformation, Cauchy problem, computational scheme.

References

1. Samarsky A.A., Gulin A.V. (1989), Numerical Methods: Studies. manual for schools. [*Chislennyye metody: Ucheb. posobie dlya vuzov*]. Moskva, Nauka, 432 p.
2. Semagina E.P. (1981), On the efficiency of T-transformations in the numerical solution of differential equations. [*Ob effektivnosti T-preobrazovaniy pri chislenom reshenii differentsialnykh uravneniy*]. Elektronnoe modelirovanie, № 4, pp. 103–104.
3. Semagina E.P. (1986), Differential transformations and their ability to solve the problems of dynamics. [*Differentsialnye preobrazovaniya i ih vozmozhnosti dlya resheniya zadach dinamiki*] Elektronnoe modelirovanie, № 4, pp. 44–50.
4. Hall J., Uatt J. (1979), Modern numerical methods for solving ordinary differential equations. [*Sovremennyye chislennyye metody resheniya obyiknovennykh differentsialnykh uravneniy*]. Moskva, World, 321 p.
5. Hemming R.V. (1972), Numerical Methods for Scientists and Engineers. [*Chislennyye metody dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov*], Moskva, 400 p.
6. Pukhov G.E. (1990), Differential spectra and model. [*Differentsialnyye spektry i modeli*], Kyiv, Naukova Dumka, 184 p.
7. Rakushev M.Y. (2012), Computational scheme for the integration of ordinary differential equations based on the differential Taylor transform with automatic step selection and order [*Vychislitel'naya shema integrirovaniya obyiknovennykh differentsialnykh uravneniy na osnove differentsialno-teylorovskogo preobrazovaniya s avtomaticheskim vyiborom shaga i poryadka*] Mezhdunarodnyy nauchno-tehnicheskyy zhurnal "Problemy upravleniya i informatiki", Kiev: NANU, Institut kibernetiki, № 6. pp. 87–96.

Y.V. Kravchenko: yl143@rambler.ru M.Y. Rakushev: r16mu0977@meta.ua Y.O. Sudnikov: vestix@ukr.net I.V. Ushakov: ushakov_nda@i.ua

Отримано: 30.06.2014 р.