

**РАКУШЕВ Михайло Юрійович,**

доктор технічних наук, старший науковий співробітник,  
Національний університет оборони України, Київ, Україна,  
<https://orcid.org/0000-0002-7703-3287>

## ОСОБЛИВОСТІ ВПРОВАДЖЕННЯ МЕТОДУ УЗГОДЖЕНИХ ВИМІРЮВАНЬ ДЛЯ ТРАЄКТОРНОЇ ОБРОБКИ В СИСТЕМІ КОНТРОЛЮ ТА АНАЛІЗУ КОСМІЧНОЇ ОБСТАНОВКИ

На теперішній час, для визначення орбітальних параметрів руху космічних апаратів використовуються підходи засновані на методі найменших квадратів. Вихідним припущенням за використання зазначеного підходу є адитивні похибки траєкторних вимірювань, які розподілені за нормальним законом. Однак, таке припущення обмежено виконується, зокрема, для радіолокаційних вимірювальних засобів, закон розподілу похибок вимірювань яких може бути близьким до рівномірного.

**Метою статті** є визначення й опис особливостей впровадження і використання методу узгоджених вимірювань для проведення траєкторної обробки у Системі контролю та аналізу космічної обстановки України.

**Методи дослідження.** Використання методу найменших квадратів, за не виконання вимоги щодо нормальності похибок вимірювань, призводить до отримання завищених (недостовірних) характеристик точності проведеної траєкторної обробки. Можливим варіантом покращення точності проведення траєкторної обробки є використання, зокрема, методу узгоджених вимірювань. Зазначений метод, розроблений вітчизняними вченими Михайлом Жечевим та Анатолієм Шептуном для визначення параметрів руху космічних літальних апаратів за адитивних похибок вимірювань, які розподілені за рівномірним законом, дає змогу суттєво підвищити точність проведення траєкторної обробки. Однак, в їх публікаціях не наведено кінцевих алгоритмів реалізації зазначеного методу. Крім того, обмежено проводяться дослідження щодо ефективності методу за відмінності закону розподілу похибок вимірювань від рівномірного.

**Отримані результати дослідження.** У статті визначено особливості впровадження методу узгоджених вимірювань для проведення траєкторної обробки у Системі контролю та аналізу космічної обстановки України.

**Елементами наукової новизни.** Запропоновано траєкторну обробку методом узгоджених вимірювань реалізувати у два етапи: по-перше, за традиційним методом найменших квадратів проводити визначення початкового наближення шуканих початкових умов руху космічного апарата й виключення аномальних вимірювань, по-друге, безпосередньо уточнення початкових умов руху космічного апарата за методом узгоджених вимірювань, який реалізований як задача лінійного програмування.

**Теоретична й практична значущість.** Враховуючи те, що задача траєкторної обробки є нелінійною відносно шуканих параметрів руху космічного апарату, наведено ітераційний алгоритм методу узгоджених вимірювань та описано шляхи забезпечення його збіжності. Наведено результати математичного моделювання для тестового прикладу. Окремо розглядається питання щодо точності проведеної обробки за зміни закону розподілу похибок вимірювань від нормального до рівномірного та їх можлива агрегація. Окреслені напрями подальших досліджень.

**Ключові слова:** космічний апарат, траєкторна обробка, метод узгоджених вимірювань, космічна ситуаційна обізнаність, підтримка.

### Вступ

Широкомасштабна агресія російської федерації проти України засвідчує, що якісно реалізовані заходи космічної підтримки операцій суттєво впливають на стан національної безпеки та оборони [1]. Однією із складових космічної підтримки операцій є космічна ситуаційна обізнаність, основою якої є спостереження, супроводження та ідентифікація космічних об'єктів штучного походження (без втрати узагальненості подальших викладок будемо вести мову про космічні апарати (далі – КА)), а також моніторинг умов у навколосемному космічному просторі. В Україні зазначені завдання, зокрема, покладені на Систему контролю та

аналізу космічної обстановки (далі – СКАКО), центральним призначенням якої є ведення Головного каталогу космічних об'єктів (далі – ГККО) [2–4].

**Постановка проблеми.** Система контролю та аналізу космічної обстановки є державною та єдиною в країні, що містить у своєму складі та (або) координує (залучає до вимірювань) наземні вимірювальні засоби для проведення траєкторних вимірювань руху КА. Надійний та достовірний ГККО можливо вести лише за умови, якщо він отримується на основі обробки траєкторних вимірювань, що проведені власними вимірювальними засобами, або, хоча б із їх залученням у

процесі організації міжнародної співпраці. Основу ГККО складають орбітальні параметри руху КА та їх характеристики точності. Данні з ГККО є основою для вирішення значної більшості інформаційних задач із космічної ситуаційної обізнаності та космічної підтримки операцій, якість вирішення яких, зокрема, визначається характеристиками точності ведення ГККО [4].

Природною сучасною тенденцією є постійне зростання вимог до якості вирішення інформаційних задач із космічної ситуаційної обізнаності та космічної підтримки операцій, що вимагає суттєвого покращення характеристик ведення ГККО. Одним із шляхів зазначеного покращення, поряд із розробкою нових, або удосконаленням існуючих вимірюваних засобів – покращення характеристик проведених траєкторних вимірювань, є впровадження нових методів (алгоритмів) проведення траєкторної обробки вимірювань – удосконалення математичного забезпечення траєкторної обробки [5].

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** На теперішній час, для визначення орбітальних параметрів руху КА (проведення траєкторної обробки) в СКАКО використовуються підходи засновані на методі найменших квадратів (далі – МНК). Наразі, результуючі алгоритми траєкторної обробки на основі зазначеного методу стали базовими для визначення параметрів руху КА і не лише в Україні. Вихідним припущенням при використанні зазначеного підходу є адитивні похибки траєкторних вимірювань, які розподілені за нормальним законом [6–8]. Таке припущення є допустимим для оптико-електронних вимірювальних засобів. Поряд із цим, воно обмежено виконується, зокрема, для радіолокаційних вимірювальних засобів супроводження КА, для яких закон розподілу похибок вимірювань може бути близьким до рівномірного. Використання МНК, за не виконання вимоги щодо нормальності похибок вимірювань, призводить до отримання завищених (недостовірних) характеристик точності проведеної траєкторної обробки, що проявляється у незадовільній точності (достовірності) вирішення інформаційних задач із космічної ситуаційної обізнаності на основі даних із ГККО [5].

Можливим варіантом покращення точності ведення ГККО в СКАКО є використання методів траєкторної обробки, що не потребують жорсткого виконання вимоги щодо нормальності похибок траєкторних вимірювань, зокрема, до таких методів відноситься метод узгоджених вимірювань (далі – МУВ). Зазначений метод запропонований вітчизняними вченими Михайлом Жечевим та Анатолієм Шептуном для визначення параметрів руху КА, накладає значно менш жорсткі вимоги на похибки траєкторних вимірювань та є ефективним, зокрема, за рівномірного закону їх розподілу [9; 10]. Однак, в їх публікаціях не наводились кінцеві алгоритми реалізації зазначеного методу та обмежено проводяться дослідження щодо ефективності МУВ

при відмінності закону розподілу похибок вимірювань від рівномірного.

Автори зазначають, що за вихідними припущеннями одним із найближчих до МУВ є метод гарантованих оцінок [7]. Однак, цей метод виходить із занадто жорстких вимог до похибок проведених вимірювань, що під час його застосування до траєкторної обробки вимірювань від вимірювальних засобів СКАКО не дає змоги повною мірою використати усі їх статистичні характеристики, що призводить до невиправдано заниженої точності результуючих оцінок параметрів руху КА.

Ще однією особливістю проведення траєкторної обробки в СКАКО є сумісна обробка вимірювань від різнотипних вимірювальних засобів, із різними законами розподілу похибок вимірювань: оптико-електронних засобів – з нормальним, та радіолокаційних засобів – з рівномірним. При цьому, особливості характеристик точності траєкторної обробки МУВ для такого випадку не розглядалися.

**Метою статті** є визначення й опис особливостей впровадження і використання методу узгоджених вимірювань для проведення траєкторної обробки у Системі контролю та аналізу космічної обстановки України.

### Виклад основного матеріалу дослідження

Завдання траєкторної обробки, у самому загальному вигляді, зводиться до пошуку таких орбітальних параметрів (початкових умов) руху КА, які найкраще, за деяким критерієм оптимальності, погоджені з проведеними вимірюваннями. Вид зазначеного критерію визначається обраним методом статистичної обробки вимірювальної інформації. Статистичні методи дають змогу використати надлишковість вимірювальної інформації та знизити вплив неминуче присутніх похибок траєкторних вимірювань на результуючу точність оцінок параметрів руху КА.

Вихідними положеннями для проведення траєкторної обробки є (запис без індексу позначає вектор, з індексом – елемент вектору):

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x = x(t, x^*), \quad (1)$$

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*), \quad (2)$$

$$z = z(t, x), \quad (3)$$

$$\{t_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4)$$

$$y = (y_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

$$\xi = y - z(t, x) = (\xi_i), \quad \xi_i = y_i - z(t_i, x(t_i, x^*)), \quad (6)$$

де  $x = x(t, x^*)$  – траєкторія руху КА;

$x^*, \hat{x}^*, n$  – (невідомі) початкові умови (далі –ПУ) руху КА, їх шукана оцінка та розмірність вектору ПУ, відповідно;

$z$  – вимірювані функції (функціональна залежність між параметрами траєкторії та параметрами, що вимірюються);

$y, t_i, N$  – траєкторні вимірювання, моменти часу в які вони проведені та їх кількість, відповідно;

$\xi$  – випадкові похибки вимірювань.

Базова відмінність методу узгоджених вимірювань (далі – МУВ) та методу найменших квадратів (далі – МНК), полягає у різних припущеннях щодо ймовірнісних характеристик похибок траєкторних вимірювань (6). Для МНК передбачається, що похибки вимірювань (6) розподілені за нормальним законом:

$$\xi \in \{M[\xi_i] = 0, K_\xi\}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (7)$$

$$\Lambda_{\text{МНК}} \{z(t, x(t, x^*)), y, \xi\} = \min \left[ \left( y - z(t, x(t, x^*)) \right)^T K_\xi^{-1} \left( y - z(t, x(t, x^*)) \right) \right], \quad (8)$$

$$\hat{x}^* = \arg \Lambda_{\text{МНК}} \{z(t, x(t, x^*)), y, \xi\}, \quad (9)$$

де  $M[\xi_i], K_\xi$  - характеристики нормального закону розподілу похибок вимірювань: математичне очікування та кореляційна матриця відповідно;

$\Lambda_{\text{МНК}}\{\dots\}$  - процедура МНК.

МНК (8) – (9) розраховує такі ПУ, які мінімізують квадратичну форму (максимізують функцію правдоподібності для нормального закону розподілу), що складена з нев'язок між проведеними вимірюваннями та траєкторією польоту КА за цих ПУ [7].

МУВ виходить із припущення, що випадкові похибки вимірювань є обмеженими та на інтервалі вимірювань, з ймовірністю близькою до 1, приймають свої граничні (максимальне та мінімальне) значення [9; 10]:

$$\xi \in \{M[\xi_i] = 0, \varepsilon_i \geq \xi_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (10)$$

$$x^* \in \left\{ \left| y_i - z(t_i, x(t_i, x^*)) \right| \leq \varepsilon_i, i = 1, \dots, N \right\} \Rightarrow \quad (11)$$

$$\Rightarrow x^* \in \left[ \min x^*, \max x^* \right], \quad (12)$$

$$\Lambda_{\text{МУВ}} \{z(t, x(t, x^*)), y, \xi\} = \frac{\min x^* + \max x^*}{2}, \quad (13)$$

$$\hat{x}^* = \arg \Lambda_{\text{МУВ}} \{z(t, x(t, x^*)), y, \xi\}, \quad (14)$$

де  $\xi$  - випадкові похибки вимірювань, з нульовим

математичним очікуванням  $M[\xi_i]$  та відомими константами, що їх обмежують ( $\varepsilon_i = \text{const}$ );

$\Lambda_{\text{МУВ}}\{\dots\}$  - процедура МУВ.

Залежність (11) визначає область ПУ руху КА для якої можливими є проведені вимірювання з похибками (10). Залежність (12) визначає границі цієї області.

МУВ (10)–(14) розраховує такі ПУ, які знаходяться в центрі області можливих значень ПУ руху КА (посередині між границями). На цьому етапі розгляду акцентуємо увагу на такому. Відповідно до (12), (13) за обчислювальною процедурою МУВ є повним аналогом методу максимальної правдоподібності для рівномірного закону розподілу похибок вимірювань [11]. Зазначене показує, що МУВ – це метод максимальної правдоподібності для рівномірного розподілу похибок. Зазначений аспект МУВ його авторами не окреслений. Однак, його врахування, дасть змогу нижче зробити деякі суттєві висновки. Одним з таких висновків є те, що отримані за МУВ оцінки шуканих ПУ асимптотично (за не необмеженого зростання кількості вимірювань) мають нормальний закон розподілу [11].

Приймемо, що задача траєкторної обробки забезпечує можливість однозначного визначення невідомих ПУ руху КА ( $\hat{x}^*$ ) за проведеними вимірюваннями ( $y$ ). Зазначене передбачає, що система (1)–(6) та (7) або (10) є спостережною. У самому загальному випадку, зазначена вимога повинна досліджуватися окремо і цим займаються, зокрема, при «плануванні проведення вимірювань». Так, система є спостережною якщо:

для МНК (7)–(9), виконується умова за якої матриця є додатньовизначеною [6]:

$$\left( \frac{\partial z(t_i, x)}{\partial x^*} \right)^T K_\xi^{-1} \left( \frac{\partial z(t_i, x)}{\partial x^*} \right), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (15)$$

$$\left( \frac{\partial z(t_i, x)}{\partial x^*} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial z(t_1, x)}{\partial x_1^*} & \frac{\partial z(t_1, x)}{\partial x_2^*} & \dots & \frac{\partial z(t_1, x)}{\partial x_n^*} \\ \frac{\partial z(t_2, x)}{\partial x_1^*} & \frac{\partial z(t_2, x)}{\partial x_2^*} & \dots & \frac{\partial z(t_2, x)}{\partial x_n^*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z(t_N, x)}{\partial x_1^*} & \frac{\partial z(t_N, x)}{\partial x_2^*} & \dots & \frac{\partial z(t_N, x)}{\partial x_n^*} \end{pmatrix};$$

для МУВ (10)–(13) область можливих значень ПУ є обмеженою (та, тоді, опуклою) [9, 10].

Матриця часткових похідних  $\partial z / \partial x^*$  є базовою для багатьох алгоритмів траєкторної обробки (це матриця Якобі відповідної нелінійної залежності), порядок її знаходження широко викладений у літературі [6; 12].

У цілому, якщо для траєкторної обробки за МНК виконується умова спостережності, тоді вона буде виконуватись і для МУВ [7]. Окремо слід зазначити, що для траєкторної обробки обов'язковим є виконання умови – кількість проведених траєкторних вимірювань має бути не меншою за число параметрів, що оцінюються. Для ефективного статистичного

згладжування похибок вимірювання (для (2), (4)) виконується більш жорстка умова:

$$N \gg n. \quad (17)$$

Так, у переважній більшості задач траєкторної обробки в СКАКО,  $n = 6$  (це кількість складових ПУ руху КА в прямокутній чи іншій системі координат) дуже рідко кількість невідомих змінних дорівнює  $n + 1 = 7$  (додатково, визначають балістичний коефіцієнт КА) чи більше (до невідомих включають параметри не випадкових похибок вимірювань, параметри моделі руху КА тощо), а  $N$  може мати значення від 50 (один сеанс вимірювань радіолокаційним засобом) до декількох тисяч вимірювань.

На практиці, при обробці траєкторних вимірювань від наземних вимірювальних засобів, виконання зазначеної вимоги забезпечують за рахунок обробки траєкторних вимірювань на декількох витках польоту КА.

Після опису загальних положень МУВ (11)-(14), перейдемо до його алгоритмічної реалізації.

Відповідно до [10] лінеаризуємо (11) у вигляді:

$$x^* \in \left\{ \left| y_i - z(t_i, x(t_i, x^*)) \right| \leq \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, N \right\} \Rightarrow (18)$$

$$\Rightarrow \left| y_i - z(t_i, x(t_i, x^0)) - \left. \frac{\partial z(t_i, x(t_i, x^*))}{\partial x^*} \right|_{x^0} \Delta x^0 \right| \leq \varepsilon_i,$$

$$i = 1, \dots, N, \quad (19)$$

де  $x^0$  – деяке значення ПУ, що задовольняє (18);

$\Delta x^0$  – приріст ПУ.

Часткові похідні в (19) тотожні відповідним елементам з (15):

$$\left. \frac{\partial z(t_i, x(t_i, x^*))}{\partial x^*} \right|_{x^0} = \left. \frac{\partial z(t_i, x)}{\partial x^*} \right|_{x^0}. \quad (20)$$

З врахуванням (20) перепишемо (19) у вигляді:

$$\left| y_i - z(t_i, x) - \left. \frac{\partial z(t_i, x)}{\partial x^*} \right|_{x^0} \Delta x^0 \right| \leq \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (21)$$

Змінюючи  $\Delta x^0$  можливо знайти верхню ( $\max \Delta x^0$ ) та нижню ( $\min \Delta x^0$ ) границі множини допустимих значень ПУ  $x^*$  – границю опуклої оболонки допустимих значень  $x^*$  (12):

$$x^0 + \min \Delta x^0 \leq x^* \leq x^0 + \max \Delta x^0. \quad (22)$$

Приведемо рішення (21), (22) до задачі лінійного програмування. Для цього введемо допоміжні змінні:

$$q = \Delta x^0 + \Delta_m \Rightarrow \Delta x^0 = q - \Delta_m, \quad q \geq 0, \quad (23)$$

де  $q, \Delta_m$  - вектори, що мають розмірність (2).

З врахуванням (23) система обмежень (21) матиме вигляд:

$$\left| y_i - z(t_i, x) - \left. \frac{\partial z(t_i, x)}{\partial x^*} \right|_{x^0} (q - \Delta_m) \right| \leq \varepsilon_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| y_i - z(t_i, x) + \left. \frac{\partial z(t_i, x)}{\partial x^*} \right|_{x^0} \Delta_m - \left. \frac{\partial z(t_i, x)}{\partial x^*} \right|_{x^0} q \right| \leq \varepsilon_i,$$

$$i = 1, \dots, N. \quad (24)$$

З урахуванням (24) та позначень (15) МУВ (13)–(14) зводиться до  $n$  задач лінійного програмування за  $n$  компонентами вектору (2):

$$\Delta z_i = y_i - z(t_i, x) + \sum_{j=1}^n \left( \left. \frac{\partial z(t_i, x)}{\partial x_j^*} \right|_{x^0} \Delta_{m_j} \right),$$

$$\Omega(x^0, \varepsilon) = \begin{cases} \sum_{j=1}^n \left( \left. \frac{\partial z(t_i, x)}{\partial x_j^*} \right|_{x^0} q_j \right) \leq \varepsilon_i + \Delta z_i, \\ \sum_{j=1}^n \left( \left. \frac{\partial z(t_i, x)}{\partial x_j^*} \right|_{x^0} q_j \right) \geq -\varepsilon_i + \Delta z_i, \end{cases} \quad i = 1, \dots, N,$$

$$\max q_j = \arg \text{Lp} \{ q_j \rightarrow \max : \Omega(x^0, \varepsilon), \quad q_1 \geq 0, \dots, q_n \geq 0 \},$$

$$\max \Delta x_j^0 = \max q_j - \Delta_{m_j},$$

$$\min q_j = \arg \text{Lp} \{ q_j \rightarrow \min : \Omega(x^0, \varepsilon), \quad q_1 \geq 0, \dots, q_n \geq 0 \},$$

$$\min \Delta x_j^0 = \min q_j - \Delta_{m_j},$$

$$j = 1, 2, \dots, n, \quad (25)$$

де  $\Omega(x^0, \varepsilon)$  – система обмежень, що накладені вимірюваннями;

$j$  – номер компоненти вектору ПУ (2);

$\Delta_{m_j}$  – деякі сталі параметри, за яких виконується умова  $q \geq 0$ . Наприклад, це можуть бути значення (як правило відомі до початку рішення), які гарантовано задовільняють умові  $\Delta_{m_j} > \min \Delta x_j^0$ ;

Lp – обраний метод лінійного програмування.

За результатами (25), отримується оцінка ПУ руху (13):

$$\bar{x}^* = x^0 + \frac{1}{2} (\min \Delta x^0 + \max \Delta x^0). \quad (26)$$

Рішення (25) можна реалізовувати окремо за компонентами  $x_j^*$ , або в цілому для вектору  $\bar{x}^*$ .

На цьому етапі розгляду зазначимо наступне. Автори МУВ визначають [10], що найбільш близьким до МУВ є метод гарантованих оцінок [6]. На підтвердження такого висновку вказує:

зведення МУВ до задачі лінійного програмування в постановці (25), є подібним за формою до процедури методу гарантованих оцінок. Обидва методи проводять рішення за компонентами (для порівняння МНК, шукає оцінку вектору у цілому);

для методу гарантованих оцінок «оптимальним» вимірюванням буде визначено те, в точці проведення

якого приріст (можлива похибка) компоненти оцінки буде мінімальною. У найбільш загальному вигляді, зазначена вимога буде виконуватися в точці (на інтервалі) максимуму  $\partial z / \partial x_j^*$ ;

для МУВ, при рішенні (25), кожна (окремо взята) задача випуклого програмування матиме розв'язок  $\Delta x_j^*$ , який не менше чим при одному з вимірювань ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), чітко відповідає обмеженню (лежить на границі області допустимих значень ПУ). Якщо темп проведених траєкторних вимірювань значно більший за швидкість зміни функції  $\partial z / \partial x^*$  (на практиці зазначена умова виконується для сучасних засобів СКАКО), отримана оцінка (з ймовірністю, що близька до одиниці) буде знаходитися на інтервалі (в точці) максимуму  $\partial z / \partial x_j^*$ .

Внаслідок того, що вихідна задача траєкторної обробки (1)–(6) є нелінійною, рішення (25)–(26) можливо реалізувати ітераційно у вигляді:

1. Задається (розраховується) початкове наближення шуканих ПУ

$$x_{d=0}^0, \quad (27)$$

де  $d$  – індекс ітерації;

2. Для  $x_d^0$  розраховується траєкторія  $z(t_i, x)$ , часткові похідні  $\partial z(t_i, x) / \partial x^*$  та формується система обмежень, що накладені вимірюваннями:

$$\Omega(x_d^0, \varepsilon); \quad (28)$$

3. Розв'язується задача (25) для  $x_d^0$ ;

4. Проводиться уточнення оцінки

$$x_{d+1}^0 = x_d^0 + \frac{1}{2}(\min \Delta x_d^0 + \max \Delta x_d^0); \quad (29)$$

5. Якщо, норма уточнення оцінки на ітерації менше деякого (наперед заданого) значення

$$\Delta_x \geq \left\| 0,5(\min \Delta x_d^0 + \max \Delta x_d^0) \right\|, \quad (30)$$

кінець розрахунку та отримане значення ПУ приймається за шукану оцінку  $\bar{x}^*$ . Якщо (29) не виконується, перехід до п. 2.

Одним з аспектів реалізації МУВ у вигляді (27)–(29) є те, що збіжність запропонованого ітераційного підходу залежить від точності завдання початкового наближення ПУ (27) – ПУ мають знаходитися в області допустимих значень шуканої оцінки (12). Виконати зазначену вимогу можливо двома шляхами:

1. Зменшити область можливих відхилень початкового наближення для МУВ (27).

Зазвичай, для траєкторної обробки початковим наближенням для ПУ є прогнозовані значення параметрів руху КА з попереднього сеансу їх уточнення (назвемо їх вихідними ПУ). Для ітераційного розрахунку за МНК, точності таких ПУ зазвичай достатньо для збіжності ітераційної процедури МНК, при цьому точність оцінки за МНК буде вищою за точність вихідних ПУ [6].

Отже, пропонується попередньо уточнювати вихідні ПУ на основі обробки вимірювання МНК (7)–(9) та отриману оцінку ПУ, взяти за початкове наближення для МУВ.

2. Розширити область збіжності ітераційного алгоритму (28)–(30).

Введення коефіцієнта релаксації  $\tau$  для граничних значень вимірювань (10) у вигляді

$$\tau \geq 1, \quad \tau \varepsilon = (\tau \varepsilon_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (31)$$

змінює (розширює) систему обмежень, що накладені вимірюваннями (28).

Якщо, коефіцієнт релаксації змінюється ітераційно, наприклад:

$$\tau_0 = 2; \quad \tau_1 = 1,5; \quad \tau_2 = 1,2; \quad \tau_{d \geq 3} = 1, \quad (32)$$

його впливу на обмеження, що накладені вимірюваннями на останній ітерації вже не буде;

$$\Omega(x_d^0, \tau_d \varepsilon). \quad (33)$$

Використовуючи підхід (31)–(33), потрібно додатково в (29) розширити умови закінчення ітерації уточнення, умовою  $\tau_d = 1$ .

Наприкінці теоретичних викладок необхідно зазначити ще одну обов'язкову процедуру МУВ, а саме: приведення вимірювань (6) до виконання вимоги (10). Це обумовлено тим, що основна невідповідність реальних траєкторних вимірювань в СКАКО вимозі (10) полягає у присутності (як правило, поодиноких) аномальних вимірів [10].

Відбракування аномальних вимірів для МУВ проводиться виходячи з критерію, що на деякому часовому інтервалі, розкид їх значень не повинен перевищувати 2 (для рівномірного закону критерій є ще більш жорстким – не більше  $\sqrt{3}$  [10]) середньоквадратичних відхилень вимірювань на цьому інтервалі в якості сусідніх до даного вимірювання розглядаються близькі не за часом, а за значенням вимірювання. Наприклад, така вимога не дає змоги використовувати (відносно прості) підходи засновані на послідовному порівнянні сусідніх вимірювань.

З урахуванням того, що вище було запропоновано для визначення початкового наближення ПУ для МУВ використовувати попередню обробку траєкторні вимірювання за МНК (7)–(9). Пропонується, процедуру відбракування аномальних вимірювань

реалізувати у вигляді перевірки умови, що відхилення вимірювань від згладженої МНК траєкторії КА не перевищує заданого значення [6]:

$$y_i - z(t_i, x(t_i, x_0^0)) \leq \Delta_y, \quad i = 1, \dots, N, \quad (34)$$

де  $x_0^0$ , - оцінка ПУ за МНК (7)–(9);

$\Delta_y$  - поріг відкидання аномальних вимірів ( $\sqrt{3} \div 2$  середньоквадратичних відхилення).

Вимірювання, які не задовольняють (34) відкидаються.

Якщо, кількість відкинутих аномальних вимірювань значна, тоді процедуру МНК (7)–(9) слід повторити.

Проведемо моделювання обробки вимірювань описаним МУВ (25)–(26). Для покращення наочності обробку проведемо для тестового прикладу:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx(t)}{dt} + w_0^2 x(t) = 0, \quad (35)$$

при  $x(t=0) = x(0), \quad \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} = v(0).$

Рівняння (35) є звичайним диференціальним рівнянням 2-го порядку, що має аналітичний розв'язок (зазначене значно спрощує моделювання, але не впливає на узагальненість подальших висновків):

$$x(t) = a \cdot \exp(-\lambda t) \sin(wt + \varphi_0), \quad (36)$$

$$a = \frac{x_0}{\sin(\varphi_0)}, \quad w = \sqrt{w_0^2 - \lambda^2}, \quad \varphi_0 = \arctg\left(\frac{w}{\lambda + v_0/x_0}\right).$$

Вихідні дані:

$$x(0) = 600, \quad v(0) = 10, \quad \lambda = 4 \cdot 10^{-4}, \quad w = \frac{2\pi}{200},$$

$$N = 50, \quad \Delta t = 20, \quad \varepsilon_x = 3 \cdot 1,4; \quad \varepsilon_v = 3 \cdot 0,12;$$

де  $N$  – загальна кількість вимірювань;

$\Delta t$  – часовий інтервал між вимірюваннями;

$\varepsilon_x, \varepsilon_v$  – граничні значення для похибок вимірювань (10).

В кожній точці вимірюється два параметра: координата та швидкість –  $N/2$  вимірювань кожного параметра. Усереднення результатів траєкторної обробки проведено методом Монте-Карло за 100 реалізаціями. Похибки вимірювань моделюються як некорельовані та для:

нормального закону з середньоквадратичним відхиленням  $\varepsilon_{x,v}/3$ ;

рівномірного закону  $[-\varepsilon_{x,v}, \varepsilon_{x,v}]$ .

Коефіцієнт релаксації задавався відповідно до (32). Додаткові змінні (23) задавались  $\Delta_{m_x(0)} = 10$  та  $\Delta_{m_v(0)} = 0,5$ . Нижче на рис. 1 можна побачити, що такі значення відповідають умові невід'ємності допоміжної змінної  $q \geq 0$ .

Зведені дані щодо проведеного моделювання наведено в табл. 1, де:  $D_{\bar{x}(0), \bar{v}(0)}, \sigma_{\bar{x}(0), \bar{v}(0)}$  - дисперсії та середньоквадратичні відхилення оцінок;  $k_\xi$  – коефіцієнт, що задає вид «змішаного» закону розподілу похибки (6) ( $\xi_{\text{норм}}$  - випадкова величина розподілена за нормальним законом розподілу (7),  $\xi_{\text{рівн}}$  – за рівномірним законом розподілу (10)):

$$\xi = k_\xi \xi_{\text{норм}} + (1 - k_\xi) \xi_{\text{рівн}}.$$

Для наочності у табл. 1, результати з меншими похибками оцінок показані напівжирним шрифтом. Типові ітерації за МУВ в просторі шуканих параметрів приведені на рис. 1, де:  $d$  - номер ітерації;  $\Delta x^0_d$  – уточнення оцінки за ітерацію (29).

Таблиця 1

Дисперсії та середньоквадратичні похибки оцінок шуканих параметрів

Похибки вимірювань	МНК	МУВ				Який метод ефективні еф				
		$D_{\bar{x}(0)}$	$\sigma_{\bar{x}(0)}$	$D_{\bar{v}(0)}$	$\sigma_{\bar{v}(0)}$					
Вид розподілу	$k_\xi$	$D_{\bar{x}(0)}$	$\sigma_{\bar{x}(0)}$	$D_{\bar{v}(0)}$	$\sigma_{\bar{v}(0)}$	$D_{\bar{x}(0)}$	$\sigma_{\bar{x}(0)}$	$D_{\bar{v}(0)}$	$\sigma_{\bar{v}(0)}$	
нормальний	1	<b>0,2</b>	<b>0,45</b>	<b>0,00023</b>	<b>0,0152</b>	0,35	0,59	0,00042	0,0205	МНК
Змішаний	0,5	<b>0,19</b>	<b>0,44</b>	<b>0,00019</b>	<b>0,0138</b>	0,26	0,51	0,00022	0,01483	МНК
Змішаний	0,2	0,39	0,62	0,00038	0,0195	<b>0,21</b>	<b>0,46</b>	<b>0,00014</b>	<b>0,01183</b>	<b>МУВ</b>
Рівномірний	0	0,52	0,72	0,00061	0,0247	<b>0,15</b>	<b>0,39</b>	<b>0,00012</b>	<b>0,01095</b>	<b>МУВ</b>
для координати – нормальний, для швидкості – рівномірний		0,2	<b>0,45</b>	<b>0,00022</b>	<b>0,0148</b>	0,3	0,55	0,0004	0,02	МНК
для координати – рівномірний, для швидкості – нормальний		0,64	0,8	0,0005	0,0224	<b>0,04</b>	<b>0,2</b>	<b>0,00003</b>	<b>0,00548</b>	<b>МУВ</b>

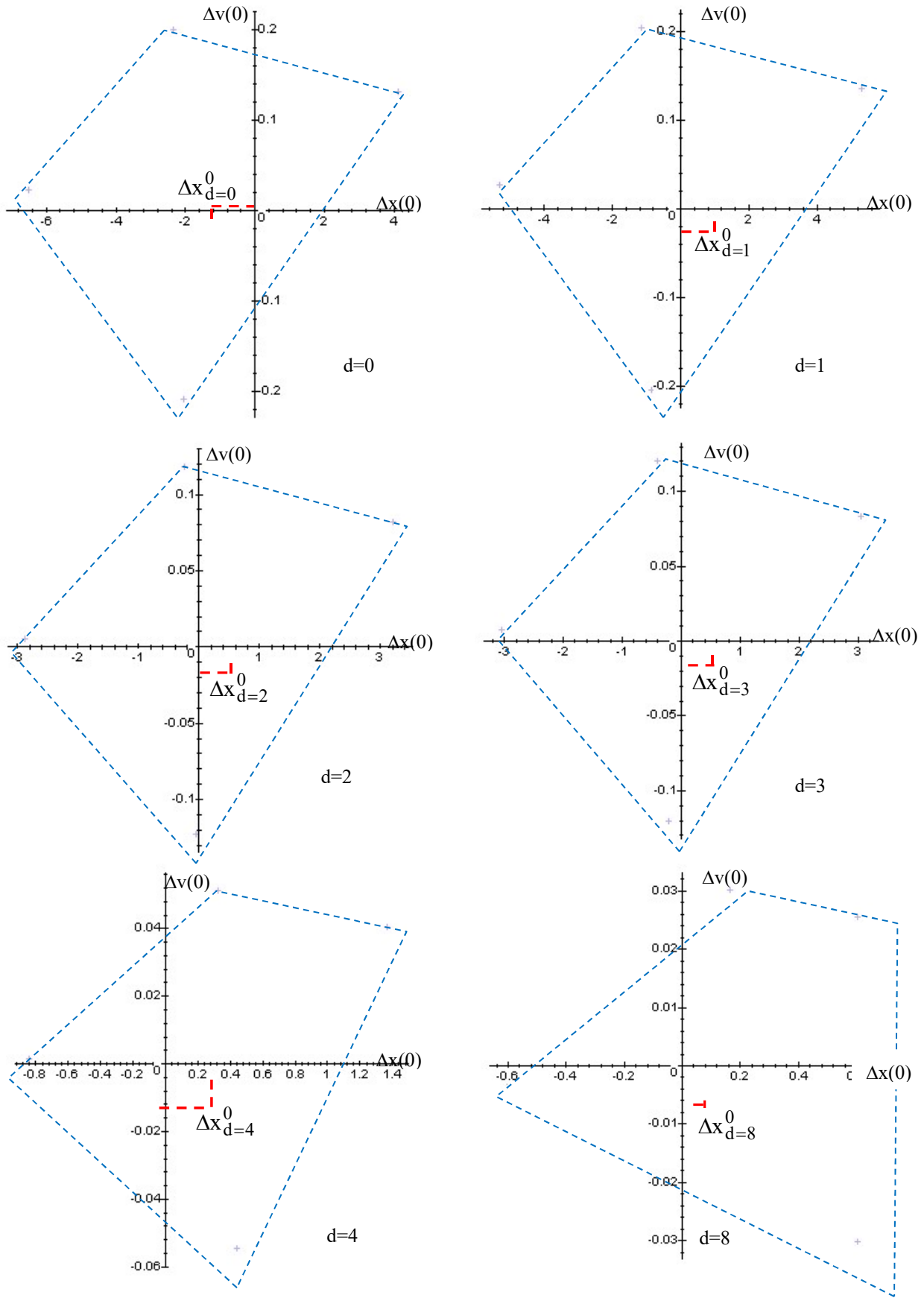


Рисунок 1 – Розрахункові граничні значення шуканих оцінок

З наведених у табл. 1 результатів бачимо, що:

1. Запропонована реалізація МУВ у вигляді задачі лінійного програмування дає змогу проводити оцінювання невідомих ПУ.

2. МУВ є ефективнішим за МНК для випадку, якщо похибки вимірювань розподілені за рівномірним законом. Отриманий результат є цілком очікуваним, так як вище зазначалось, що МУВ є, фактично, методом максимальної правдоподібності для рівномірного закону.

У цілому, для рівномірного розподілу, за умови зростання кількості вимірювань порівнювальна ефективність між МНК та МУВ буде зростати. Так, у загальному вигляді, для методу максимальної правдоподібності (за відповідності фактичного закону розподілу похибок вимірювань та припущень щодо його виду) дисперсія оцінки математичного очікування за:

МНК обернено пропорційна кількості вимірювань  $D_{\text{МНК}} \sim n^{-1}$ ;

МУВ обернено пропорційна квадрату кількості вимірювань  $D_{\text{МУВ}} \sim n^{-2}$ .

Якісно, на підтвердження такого результату вказує графік отриманий авторами МУВ [10], який для відношення середньоквадратичних відхилень оцінок за МУВ та МНК має вигляд функції  $\sqrt{n}$ .

3. Якщо похибки вимірювань розподілені за нормальним законом, МНК є ефективнішим за МУВ. Взагалі МНК для нормальних похибок вимірювань буде ефективнішим за будь-який інший метод. Пояснюється це тими ж самими властивостями методу максимальної правдоподібності.

4. Порівняння варіантів для випадків якщо похибки вимірювань мають «змішаний» закон розподілу та, якщо частина вимірювань розподілена за одним законом, а частина за іншим, показує, що результуюча точність оцінювання визначається стійкістю відповідного методу оцінювання до зміни закону розподілу похибок вимірювань. У цілому, МУВ є ефективнішим за МНК, якщо результуючий закон розподілу похибок «близький» до рівномірного ( $k_{\xi} \leq 0,2$ ), або «інформативний внесок» вимірювань з рівномірним законом розподілу є вищим за внесок решти вимірювань.

5. Раціональне використання МУВ дає змогу суттєво, порівняно з МНК, підвищити точність (достовірність) оцінки характеристик точності проведеної статистичної обробки.

Окремо слід зазначити ще одну суттєву порівняльну характеристику МУВ та МНК – це їх результуючі обчислювальні складності. У цілому, МУВ має до двох порядків більшу обчислювальну складність порівняно з МНК. Можна стверджувати, що зазначена характеристика є однією з суттєвих щодо «гальмування» впровадження МУВ в практику траєкторної обробки вимірювань.

## Висновки й перспективи подальших досліджень

Розповсюджуючи розглянуті вище результати на можливість використання методу узгоджених вимірювань для задачі траєкторної обробки в Системі контролю та аналізу космічної обстановки можна зазначити:

загальний обчислюваний підхід, де на першому етапі за традиційним методом найменших квадратів проводиться визначення початкового наближення шуканих початкових умов руху КА та виключення аномальних вимірювань, а на другому етапі проводиться уточнення початкових умов руху КА за методом узгоджених вимірювань, який реалізований як задача лінійного програмування, дає змогу проводити визначення початкових умов руху КА;

для впровадження методом узгоджених вимірювань в практику траєкторної обробки, насамперед, необхідно провести додаткові дослідження щодо визначення границь ефективності використання методу узгоджених вимірювань при обробці вимірювань від різнотипних вимірювальних засобів Системи контролю та аналізу космічної обстановки – вимірювань із різними законами розподілу похибок. Зазначене є актуальним для обробки вимірювань від радіолокаційних та оптико-електронних засобів, які є основними в Системі контролю та аналізу космічної обстановки. В якості критерію ефективності використання методу узгоджених вимірювань потрібно розглядати точність (достовірність) проведеної траєкторної обробки – характеристики похибок отриманих оцінок початкових умов руху КА;

загалом, для методу узгоджених вимірювань, чим далі, розподіл від нормального та чим більше ймовірність значень похибок, які близькі до їх максимальних значень тим більший вираш в точності результуючих оцінок порівняно з методом найменших квадратів. При рівномірному законі розподілу, метод узгоджених вимірювань, є ефективнішим за будь-який інший метод обробки, а порівняно з методом найменших квадратів ефект може складати десятки разів.

основним стримуючим фактором впровадження методу узгоджених вимірювань в практику траєкторної обробки Системи контролю та аналізу космічної обстановки, окрім складності, невпевненості в його ефективності та небажання змінювати вже відпрацьовані підходи є значно більша, порівняно з методом найменших квадратів, обчислювальна складність алгоритмів методу узгоджених вимірювань. Однак, розвиток обчислювальних засобів та, відповідно, суттєве зростання їх характеристик, дає змогу значно послабити критичність такого впливу.

Отже, вище визначено та описано особливості впровадження та використання розробленої алгоритмічної реалізації методу узгоджених вимірювань для проведення траєкторної обробки у



Системі контролю та аналізу космічної обстановки України.

Реалізація описаних підходів, дасть змогу досягти покращення якості вирішення завдань із космічної

ситуаційної обізнаності та заходів із космічної підтримки операцій, що суттєво вплине на стан національної безпеки та оборони у цілому й на спроможності Збройних Сил України, зокрема.

### Список бібліографічних посилань

1. **Allied Joint Publication AJP-3.3. Edition B. Version 1.** Allied Joint Doctrine For Air And Space Operations. April 2016.
2. **Випорханюк Д. М., Ковбасюк С. В.** Основи космічної ситуаційної обізнаності (Space Situational Awareness, SSA). Іноземний і вітчизняний досвід космічної діяльності у сфері оборони: монографія. Житомир: Вид. О. О. Євенок, 2018. 532 с.
3. **Варламов І. Д., Зуйко В. В.** Основи побудови системи контролю та аналізу космічної обстановки. Київ: НУОУ, 2015. 221 с.
4. **Kovbasiuk S., Rakushev M., Permiakov O., Lavrinchuk O.** Outer Space Monitoring System: Purpose, Tasks, Structure and approaches to trajectory processing. 2019 *IEEE International Conference on Advanced Trends in Information Theory, ATIT 2019* – Proceedings 9030522. P. 154–160. DOI: 10.1109/ATIT49449.2019.9030522.
5. **Ракушев М. Ю., Ковбасюк С. В.** Шляхи удосконалення обробки вимірювань траєкторій космічних апаратів видового спостереження в системі контролю та аналізу космічної обстановки. *Сучасні інформаційні технології у сфері безпеки та оборони*. 2017. № 2 (29). С. 71–75.
6. **Жданюк Б. Ф.** Основы статистической обработки траекторных измерений. Москва: Сов. радио, 1978. 384 с.
7. **Эльясберг П. Е.** Определение движения по результатам измерений. Москва: Наука, 1976. 416 с.
8. **Каневский Л. Б., Ковбасюк С. В.** Аналіз особливостей ведення каталогу космічних об'єктів за інформацією від вітчизняних оптичних засобів. *Вісник ЖДТУ*. 2011. №1 (56). С. 50-55.
9. **Жечев М. М., Шептун А. Д.** Метод согласованных измерений определения движения космических летательных аппаратов. *Техническая механика*. 2002. №2. С. 36–44.
10. **Жечев М. М., Шептун А. Д., Вентцковский О. М., Горев Б. Н., Маштак И. В.** Метод согласованных измерений для определения движения космических аппаратов. *Вісник Дніпропетровського університету. Серія “Ракетно-космічна техніка”*. Дніпропетровськ: ДНУ. 2009. №4. Вип. 13. Том 1. С. 21–27.
11. **Єременко В. С., Куш Ю. В., Мокійчук В. М., Самойленко О. В.** Статистичний аналіз даних вимірювань: навчальний посібник. Київ: НАУ, 2013. 320 с.
12. **Ракушев М. Ю.** Прогнозування руху космічних апаратів на основі диференціально-тейлорівських перетворень: монографія. Житомир. Видавець О. О. Євенок, 2015. 324 с.

## PECULIARITIES OF IMPLEMENTATION OF THE METHOD OF COORDINATED MEASUREMENTS FOR TRAJECTORY PROCESSING IN THE SYSTEM OF SPACE SITUATION CONTROL AND ANALYSIS

**RAKUSHEV Mykhailo**, Doctor of Technical Science, Senior researcher, Associate professor of the chair, National Defence University of Ukraine, Kyiv, Ukraine, <https://orcid.org/0000-0002-7703-3287>

**Formulation of the problem in general.** Currently, approaches based on the least squares method are used to determine the orbital parameters of spacecraft motion. The initial assumption when using the specified approach is that the additive errors of trajectory measurements are distributed according to the customary law. However, such an assumption is fulfilled to a limited extent, particularly for radar measuring instruments, the law of distribution of measurement errors of which can be close to uniform.

**The purpose of the article is to determine and describe the features of the implementation and use of the method of coordinated measurements for trajectory processing in the system of control, and to analyse the space situation in Ukraine.**

**Research methods.** The use of the least squares method, if the requirement for normality of measurement errors is not met, leads to obtaining overestimated (unreliable) characteristics of the accuracy of the trajectory processing. A possible option for improving the accuracy of trajectory processing is to use, in particular, the method of coordinated measurements.

**Analysis of recent research and publications.** The specified method was developed by Ukrainian scientists Mykhailo Zhechev and Anatoly Sheptun to determine the parameters of the motion of spacecraft and, with additive measurement errors distributed according to a uniform law, allows significantly increasing the accuracy of trajectory processing. However, their publications did not provide final algorithms for implementing the specified method, and limited research is being conducted on the effectiveness of the technique when the law of distribution of measurement errors differs from a uniform one.

**Presenting the main material.** The article identifies the features of implementing the method of coordinated measurements for trajectory processing in the Space Situation Control and Analysis System of Ukraine.

**Elements of scientific novelty.** It is proposed to implement trajectory processing using the coordinated measurements method in two stages: first, using the traditional least squares method to determine the initial approximation of the desired initial conditions of the spacecraft motion and exclude anomalous measurements,

second, directly specifying the initial conditions of the spacecraft motion using the coordinated measurements method, which is implemented as a linear programming problem.

**Conclusion and the perspectives of future research.** The issue of the accuracy of the processing when changing the law of distribution of measurement errors from normal to uniform and their possible aggregation is separately considered. Directions for further research are outlined.

**Keywords:** spacecraft, trajectory processing, method of coordinated measurements, space situational awareness, support.

## References

1. Allied Joint Publication AJP-3.3. Edition B. Version 1. Allied Joint Doctrine For Air And Space Operations. April 2016.
2. Vyporkhanyuk, D. M., Kovbasyuk, S. V., (2018). *Fundamentals of Space Situational Awareness (SSA). Foreign and domestic experience of space activities in defence: monograph.* Zhytomyr: Publishing House O. O. Evenok,
3. Varlamov, I. D., Zuiko, V. V., etc. (2015). *Fundamentals of building a system for controlling and analysing the space environment.* Kyiv: NUOU.
4. Kovbasiuk, S., Rakushev, M., Permiakov, O., Lavrinchuk, O., (2019). Outer Space Monitoring System: Purpose, Tasks, Structure and approaches to trajectory processing. *2019 IEEE International Conference on Advanced Trends in Information Theory, ATIT 2019 – Proceedings* 9030522, 154-160. DOI: 10.1109/ATIT49449.2019.9030522.
5. Rakushev, M. Yu., Kovbasyuk, S. V., (2017). Ways to improve the processing of measurements of trajectories of species observation spacecraft in the system of control and analysis of the space situation. *Modern information technologies in security and defence*, 2 (29).
6. Zhdanyuk, B. F., (1978). *Fundamentals of statistical processing of trajectory measurements.* Moscow : Sov. Radio, 384.
7. Elyasberg, P. E., (1976). *Determination of motion based on measurement results.* Moscow : Nauka. 416.
8. Kanevskiy, L. B., Kovbasyuk, S. V., (2011). Analysis of the features of maintaining a catalogue of space objects based on information from domestic optical means. *Visnyk ZhDTU.* Zhytomyr: ZhDTU, 1 (56), 50-55.
9. Zhechev, M. M., Sheptun, A. D., (2002). Coordinated measurements are used to determine the movement of spacecraft. *Technical mechanics.* Dnipropetrovsk: ITM of the National Academy of Sciences of the National Academy of Sciences, 2, 36-44.
10. Zhechev, M. M., Sheptun, A. D., Ventskovsky, O. M., Horev, B. N., Mashtak, I. V., (2009). Coordinated measurements are used to determine the movement of spacecraft. *Bulletin of Dnipropetrovsk University. Series «Rocket and space technology».* Dnipropetrovsk: DNU, 4, 13, 1, 21-27.
11. Eremenko, V. S., Kushch, Yu. V., Mokiychuk, V. M., Samoilenko, O. V., (2013). *Statistical analysis of measurement data: a textbook.* Kyiv: NAU, 320.
12. Rakushev, M. Yu., (2015). *Prediction of spacecraft motion based on differential Taylor transformations: monograph.* Zhytomyr. Publisher O. O. Evenok, 324.

<i>Рукопис надійшов до редакції</i>	23.01.2025
<i>Рукопис прийнято до друку після рецензування</i>	25.03.2025
<i>Дата публікації</i>	30.04.2025