

Гусак Юрій Аркадійович (доктор військових наук, професор) <sup>1</sup>

Кірсанов Сергій Олександрович (доктор технічних наук, старший науковий співробітник) <sup>2</sup>

Власюк Віктор Миколайович (кандидат технічних наук, старший науковий співробітник) <sup>2</sup>

Старинський Іван Михайлович (кандидат технічних наук) <sup>1</sup>

Шовкошитний Ігор Іванович (кандидат військових наук, старший науковий співробітник) <sup>1</sup>

<sup>1</sup> Національний університет оборони України, Київ, Україна

<sup>2</sup> Центральний науково-дослідний інститут Збройних Сил України, Київ, Україна

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ БАГАТОРІВНЕВОЇ ІЄРАРХІЧНОЇ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ УГРУПОВАННЯМИ ВІЙСЬК

У статті наведено математичну модель багаторівневої ієрархічної системи управління угрупованнями військ, що базується на положеннях теорії управління. Метою статті є висвітлення математичної моделі багаторівневої ієрархічної системи управління угрупованнями військ, що базується на основних положеннях теорії управління і дає змогу досліджувати вплив окремих рівнів управління на ефективність системи в цілому, а також обґрунтовувати вимоги до її раціональної структури. Під час проведення дослідження використано методи теорії управління, зокрема, комплексний метод багатопараметричної ідентифікації, імітаційне моделювання та комбінований метод оптимізації рішень. Розроблено математичну модель на основі системи диференціальних рівнянь, що описують управління на стратегічному, оперативному й тактичному рівнях. Цей підхід надає можливість аналізувати взаємозв'язки між рівнями управління та їх вплив на загальну ефективність системи управління військами. Основним науковим завданням статті є розробка математичної моделі ієрархічної системи управління угрупованнями військ, що дає змогу підвищити ефективність управлінських процесів завдяки чіткому обґрунтуванню структурних вимог до кожного рівня управління. Модель призначена для аналізу та оцінки впливу різних рівнів управління (стратегічного, оперативного, тактичного) на загальну ефективність функціонування системи управління військами. Показано, що математичну модель багаторівневої ієрархічної системи управління угрупованнями військ можна представити системою диференціальних рівнянь, в якій стан об'єкта управління описується вектором його стану, управляючий вплив (прийняте рішення) – вектором управління, а безпосереднє управління – операторами контролю стану та планування застосування об'єкта управління. Запропонований підхід дає змогу досліджувати вплив кожного рівня управління на ефективність системи управління військами в цілому, що дає змогу застосовувати її раціональну структуру та обґрунтовувати вимоги до них. Практична значущість дослідження зводиться до можливості застосування отриманих результатів для удосконалення процесів управління угрупованнями військ. Модель може бути використана для оптимізації структури управління Збройними Силами, а також для розробки практичних рекомендацій щодо раціонального розподілу управлінських функцій та підвищення ефективності виконання завдань на всіх рівнях управління військами.

**Ключові слова:** математична модель, система управління військами, теорія управління, багаторівнева ієрархічна система управління, угруповання військ.

### Вступ

**Постановка проблеми.** Одним із пріоритетних завдань оборонної реформи України на сучасному етапі є створення ефективної системи управління військами (силами) [1; 2]. Це завдання поступово реалізується шляхом удосконалення системи управління військами (силами). Але, незважаючи на це, нинішній стан системи управління військами (силами) не відповідає вимогам, які до неї висуваються [3]. Однією з причин такої невідповідності є недосконалість існуючого методичного апарату, який використовується для дослідження процесу управління військами та

обґрунтування вимог до нього. Цей методичний апарат базується на математичній моделі процесу управління військами, в якій застосовано коефіцієнтний підхід, через що не забезпечується дотримання єдиної ідеології обґрунтування вимог до управління військами і виникає можливість отримати лише суб'єктивно визначені їх перелік та значення.

Отже, вирішення питань, пов'язаних із математичним моделюванням процесу управління військами, є актуальним науковим завданням.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Аналіз методичного апарату з питань управління

військами засвідчив, що він є розрізненим, специфічним і, насамперед, стосується обґрунтування вимог до системи та процесів управління, оцінювання системи управління за складовими та організації роботи на пунктах управління [4]. Єдиний завершений методичний апарат для оцінювання системи управління військами (силами), які б комплексно урахували сучасні вимоги до управління військами [5], нині відсутній.

Результати аналізу існуючого методичного апарату у цій галузі показують, що в його основу покладені такі методи:

комплексний метод багатопараметричної ідентифікації характеристик складних систем (метод групового врахування аргументів, метод багатомірної лінійної екстраполяції, метод регресійного аналізу, метод аналізу ієрархій) [4];

комбінований метод пошуку оптимальних рішень з використанням засобів теорії графів [5]; імітаційного моделювання [6]; аналітичні та імовірнісні [7; 8].

Багатопараметричні підходи щодо опису складних систем військового призначення [4] можуть бути корисними під час опису багаторівневих систем управління угрупованнями військ, адже використовувані у підході методи (зокрема, метод групового врахування аргументів, метод аналізу ієрархій) дають змогу враховувати властивість ієрархічності таких систем (через побудову дерева цілі). Проте застосування цих методів має низку обмежень, пов'язаних із:

проблемою суб'єктивності оцінок, необхідністю врахування досвіду та інтуїції експертів, а іноді й когнітивних упереджень;

проблемою формалізації знань і узгодження думок, подолання якої потребує наявності чітких моделей або правил;

значними витратами часу та ресурсів для залучення компетентних експертів, організації опитувань, анкетувань і оброблення результатів;

обмеженою адаптивністю експертних методів до вирішення задач в умовах;

зміни зовнішнього середовища чи внутрішньої структури системи;

складністю опису багаторівневих зв'язків у багаторівневих системах, у яких взаємодія між рівнями може бути надзвичайно складною, що ускладнює використання навіть добре структурованих експертних методів.

Подолання зазначених проблем і підвищення ефективності застосування експертних методів для опису складних багаторівневих системах зазвичай потребує: комбінування з іншими методами, використання математичних моделей, методів машинного навчання та симуляцій для доповнення експертних оцінок; розроблення узгоджувальних механізмів обробки експертних даних (процедури узгодження експертних даних у методі аналізу

ієрархії, метод Делфі тощо) для зменшення розбіжності між експертами; актуалізації знань з регулярним оновленням бази знань і залучення експертів із різних галузей.

Зокрема в [8] під час аналізу властивостей системи управління оперативним забезпеченням військ (сил) визначено, що оскільки така система не має окремих пунктів управління (далі – ПУ), а органи управління видами оперативного забезпечення розташовуються безпосередньо на пунктах управління угруповань військ (сил), які забезпечуються, показники живучості та стійкості для цієї системи не потребують окремого обґрунтування. Водночас, головним показником, що характеризує систему управління (далі – СУ) оперативним забезпеченням, який відповідає основній меті процесу управління (своєчасність прийняття управлінських рішень) та який потребує обґрунтування, залишається показник оперативності управління, оцінювання якого запропоновано здійснювати через тривалість циклу управління, а основною метою та критерієм оцінювання управління обрана можливість випередження противника в діях. Для опису циклу управління використана типова мережева модель функціонування ОУ, а для опису часових параметрів циклу управління, які, за припущенням, розподілені за нормальним законом, застосовано аналітичні та імовірнісні методи на основі функції Лапласа, за допомогою яких отримано імовірності своєчасного завершення циклу управління, значення математичного сподівання часу, який витрачається на цикл управління, а також середні квадратичні відхилення цього часу. Отже, такий методичний підхід [8] добре описує властивість оперативності системи управління, проте він не враховує багаторівневого ієрархічного характеру систем управління угрупованнями військ.

Під час моделювання функціонування багаторівневої системи управління угрупованнями військ слід дотримуватись ієрархічного підходу при формуванні (описі) систем, який задається відповідно до положень теорії ієрархічних багаторівневих систем, авторами якої є М. Mesarovich, D. Mucko, Y. Takahara. Ними детально розглянуті властивості функціональної багатопараметричної ієрархії управління та визначено, що переваги ієрархічного підходу зводяться до такого [9]:

завдяки інтеграції процесів, що відбуваються на нижчих рівнях ієрархічної системи з процесами управління (координації) вищого рівня, з'являється можливість здійснювати коригування структури існуючої системи з метою підвищення ефективності її функціонування;

можливість декомпозиції глобальних задач, які вирішуються в складних ешелонованих ієрархічних системах, на простіші підзадачі, що сприяє спрощенню процесу їх вирішення;

за рахунок стратифікованого опису моделі складної системи можливо простіше отримати функцію якості вищого елемента (підсистеми), яка визначається незначною кількістю ключових змінних, що характеризують ефективність функціонування підсистем нижчих рівнів;

зниження затрат ресурсів (зусиль) на вироблення рішень під час розв'язання масштабних задач за рахунок спрощення задач на кожному рівні (зменшення числа керуючих змінних та змінних, які спостерігаються).

Викладений нижче формалізований опис базується на аналітичних математичних виразах та рівняннях, які згідно [10] описуватимуть вихідні параметри системи та її підсистем як функції від відповідних вхідних та внутрішніх параметрів.

Перейдемо до безпосереднього формалізованого опису процесу функціонування багаторівневої системи управління ОУВ (оперативний рівень).

Проведений аналіз дає змогу висунути гіпотезу про те, що найбільш ефективними та природними методами оцінювання процесів управління військами (силами) можуть бути методи та алгоритми теорії управління.

**Метою статті** є висвітлення математичної моделі багаторівневої ієрархічної системи управління угрупованнями військ, що базується на основних положеннях теорії управління і дає змогу досліджувати вплив окремих рівнів управління на ефективність системи в цілому, а також обґрунтовувати вимоги до її раціональної структури.

### Виклад основного матеріалу дослідження

Розглянемо систему управління оперативним угрупованням військ (далі – ОУВ), до якої належить орган управління – Командування ОУВ (далі – КОУВ), та об'єкт управління – ОУВ, який має три підпорядковані оперативно-тактичні угруповання військ (далі – ОТУВ) (рис. 1).

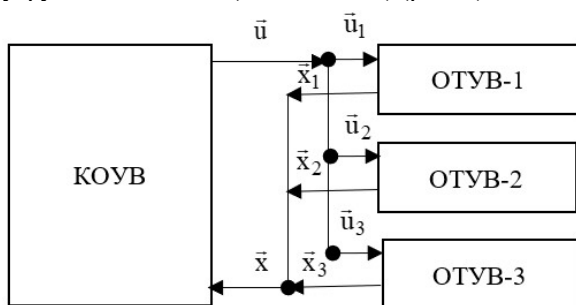


Рисунок 1 – Система управління оперативним угрупованням військ (оперативний рівень)

За таких умов управлінські рішення  $\bar{u}$ , які відпрацьовуються ОУ, надходять до ОТУВ-1, ОТУВ-2 та ОТУВ-3 як управлінські рішення  $\bar{u}_1$ ,

$\bar{u}_2$  та  $\bar{u}_3$  відповідно, тобто управлінське рішення є вектором  $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ .

Інформація щодо стану ОТУВ-1, ОТУВ-2 та ОТУВ-3  $\bar{x}_1$ ,  $\bar{x}_2$  та  $\bar{x}_3$ , відповідно, надходить до ОУ також у вигляді вектору  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ .

До системи управління ОТУВ належать орган управління – Командування ОТУВ (КОТУВ) та об'єкт управління – ОТУВ, налічує три угруповання військ (УВ) (рис. 2)

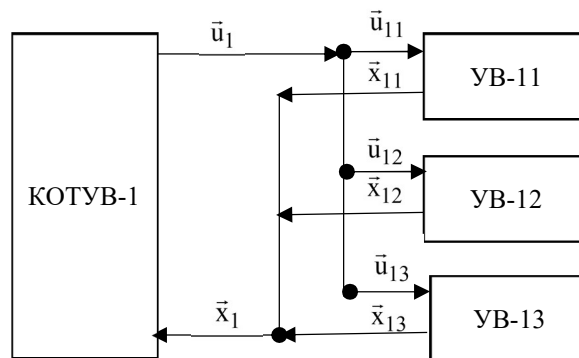


Рисунок 2 – Система управління оперативним угрупованням військ (оперативно-тактичний рівень)

Водночас управлінські рішення  $\bar{u}_1$ , які відпрацьовуються КОТУВ-1, надходять до УВ-11, УВ-12 та УВ-13 як управлінські рішення  $\bar{u}_{11}$ ,  $\bar{u}_{12}$  та  $\bar{u}_{13}$  відповідно, тобто управлінське рішення є вектором  $\bar{u}_1 = (\bar{u}_{11}, \bar{u}_{12}, \bar{u}_{13})$ . А інформація щодо стану УВ-11, УВ-12 та УВ-13  $\bar{x}_{11}$ ,  $\bar{x}_{12}$  та  $\bar{x}_{13}$

відповідно надходить до органу управління також у вигляді вектора  $\bar{x}_1 = (\bar{x}_{11}, \bar{x}_{12}, \bar{x}_{13})$ .

До системи управління УВ належать орган управління – Командування УВ (далі – КУВ) та об'єкт управління – УВ (рис. 3).

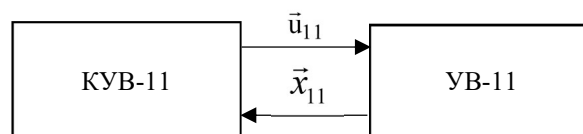


Рисунок 3 – Система управління угрупованням військ (тактичний рівень)

За таких умов управлінські рішення  $\bar{u}_1$ , які відпрацьовуються КУВ-11, надходять до УВ-11, а інформація щодо стану УВ-11 надходить до ОУ у вигляді вектору  $\bar{x}_{11}$ . Загальну схему системи управління ОУВ наведено на рис. 4.

Як відомо з [5], управління військами може бути представлено як процес, у якому орган управління виробляє на підставі проведеного аналізу отриманих даних рішення та доводить його до військ, які є об'єктом управління (рис. 5).

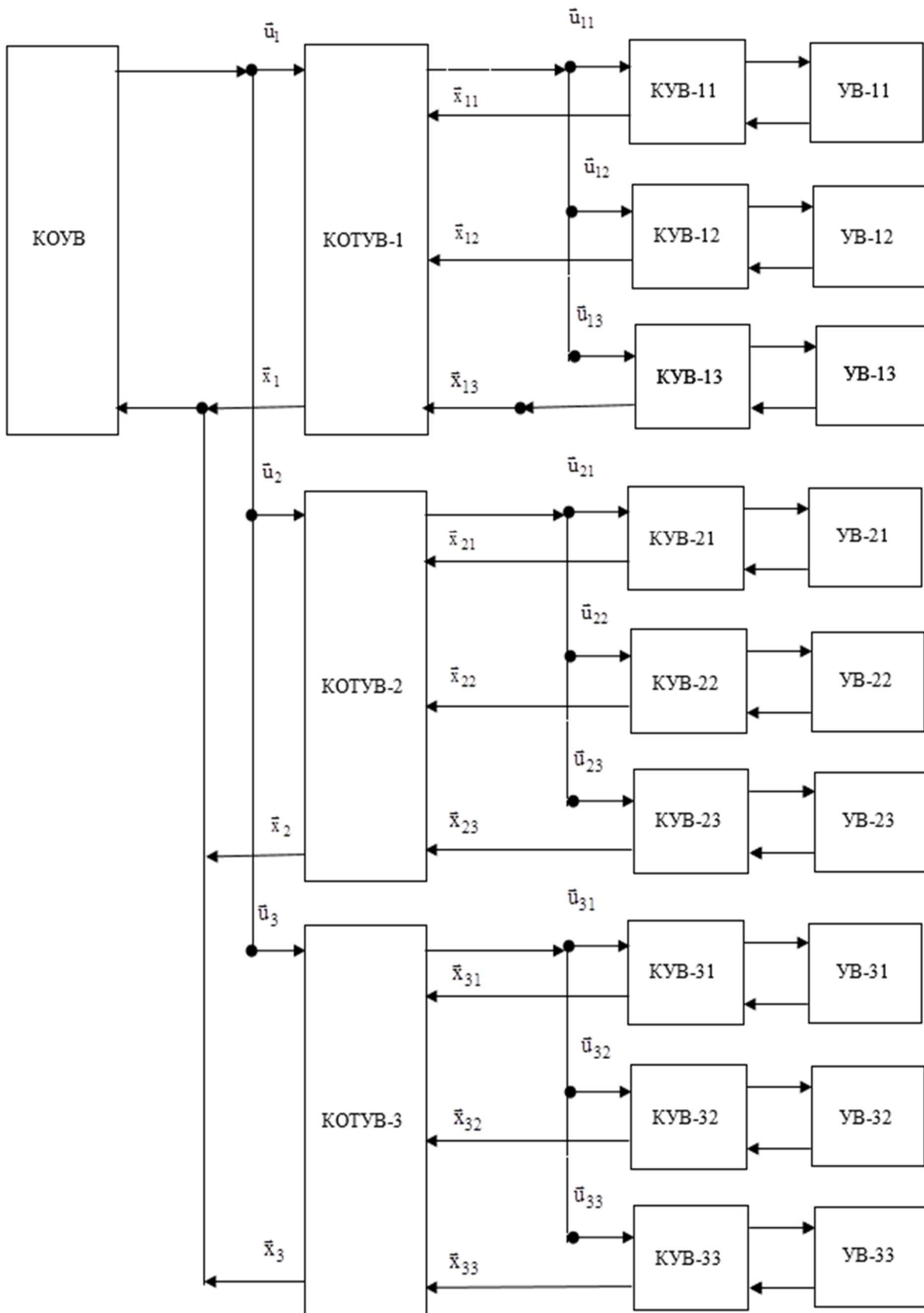


Рисунок 4 – Загальна схема системи управління оперативним угрупованням військ

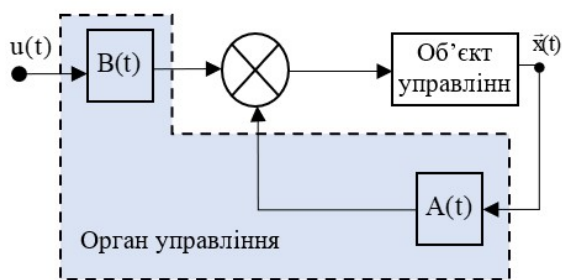


Рисунок 5 – Модель процесу управління військами

За таких умов, від об'єкту управління на орган управління надходить інформація  $\bar{x}$  щодо стану об'єкту управління після виконання (або під час виконання) рішення органу управління:

$$\dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x}(t), u(t)), \quad (1)$$

де  $\bar{x}(t)$  – вектор стану об'єкту управління;

$\bar{u}(t)$  – вектор управління (управляюче рішення) органу управління.

Згідно із положеннями теорії управління та відповідно до [5] математична модель процесу управління військами, яка відображена на рис. 6, може бути представлена в загальному випадку у вигляді диференціального рівняння:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A(t)\bar{x}(t) + B(t)\bar{u}(t), \quad (2)$$

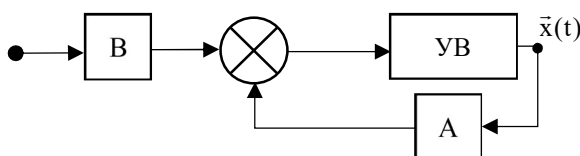


Рисунок 6 – Модель процесу управління військами

де  $A(t)$  та  $B(t)$  – матриці взаємного впливу параметрів вектора стану органу управління та вектора управління (прийнятого рішення на операцію) ОУ відповідно.

Системи управління кожного ОУВ можна описати системами диференціальних рівнянь:

для УВ-11, УВ-12 та УВ-13 –

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \bar{x}_{11} = A_{УВ-11} \bar{x}_{11} + B_{УВ-11} \bar{u}_{11} \\ \frac{d}{dt} \bar{x}_{12} = A_{УВ-12} \bar{x}_{12} + B_{УВ-12} \bar{u}_{12}, \\ \frac{d}{dt} \bar{x}_{13} = A_{УВ-13} \bar{x}_{13} + B_{УВ-13} \bar{u}_{13}, \end{cases} \quad (3)$$

де  $\bar{x}_{11}$ ,  $\bar{x}_{12}$  та  $\bar{x}_{13}$  – вектори стану УВ-11, УВ-12 та УВ-13 відповідно;

$\bar{u}_{11}$ ,  $\bar{u}_{12}$  та  $\bar{u}_{13}$  – вектори управління (управляючі рішення) КУВ-11, КУВ-12 та КУВ-13;

$A_{УВ-11}$ ,  $A_{УВ-12}$  та  $A_{УВ-13}$  – оператори, які описують процеси контролю застосування угруповань військ УВ-11, УВ-12 та УВ-13 відповідно;

$B_{УВ-11}$ ,  $B_{УВ-12}$  та  $B_{УВ-13}$  – оператори, які описують процеси планування застосування угруповань військ УВ-11, УВ-12 та УВ-13 відповідно;

для УВ-21, УВ-22 та УВ-23 –

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \bar{x}_{21} = A_{УВ-21} \bar{x}_{21} + B_{УВ-21} \bar{u}_{21} \\ \frac{d}{dt} \bar{x}_{22} = A_{УВ-22} \bar{x}_{22} + B_{УВ-22} \bar{u}_{22}, \\ \frac{d}{dt} \bar{x}_{23} = A_{УВ-23} \bar{x}_{23} + B_{УВ-23} \bar{u}_{23}, \end{cases} \quad (4)$$

де  $\bar{x}_{21}$ ,  $\bar{x}_{22}$  та  $\bar{x}_{23}$  – відповідно вектори стану угруповань військ УВ-21, УВ-22 та УВ-23 відповідно;

$\bar{u}_{21}$ ,  $\bar{u}_{22}$  та  $\bar{u}_{23}$  – відповідно вектори управління (управляюче рішення) КУВ-21, КУВ-22 та КУВ-23;

$A_{УВ-21}$ ,  $A_{УВ-22}$  та  $A_{УВ-23}$  – оператори, які описують процеси контролю застосування УВ-21, УВ-22 та УВ-23 відповідно;

$B_{УВ-21}$ ,  $B_{УВ-22}$  та  $B_{УВ-23}$  – оператори, які описують процеси планування застосування УВ-21, УВ-22 та УВ-23 відповідно;

для УВ-31, УВ-32 та УВ-33 –

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \bar{x}_{31} = A_{УВ-31} \bar{x}_{31} + B_{УВ-31} \bar{u}_{31} \\ \frac{d}{dt} \bar{x}_{32} = A_{УВ-32} \bar{x}_{32} + B_{УВ-32} \bar{u}_{32}, \\ \frac{d}{dt} \bar{x}_{33} = A_{УВ-33} \bar{x}_{33} + B_{УВ-33} \bar{u}_{33}, \end{cases} \quad (5)$$

де  $\bar{x}_{31}$ ,  $\bar{x}_{32}$  та  $\bar{x}_{33}$  – вектори стану УВ-31, УВ-32 та УВ-33 відповідно;

$\bar{u}_{31}$ ,  $\bar{u}_{32}$  та  $\bar{u}_{33}$  – вектори управління (управляючі рішення) КУВ-31, КУВ-32 та КУВ-33;

$A_{УВ-31}$ ,  $A_{УВ-32}$  та  $A_{УВ-33}$  – оператори, які описують процеси контролю застосування УВ-31, УВ-32 та УВ-33 відповідно;

$B_{УВ-31}$ ,  $B_{УВ-32}$  та  $B_{УВ-33}$  – оператори, які описують процеси планування застосування УВ-31, УВ-32 та УВ-33 відповідно.

Аналогічно системи управління ОУВ-1, ОУВ-2 та ОУВ-3 можна описати такими системами диференціальних рівнянь:

для ОУВ-1 –

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{УВ-11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{УВ-12} & 0 \\ 0 & 0 & A_{УВ-13} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{13} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{УВ-11} & 0 & 0 \\ 0 & B_{УВ-12} & 0 \\ 0 & 0 & B_{УВ-13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{u}_{11} \\ \bar{u}_{12} \\ \bar{u}_{13} \end{pmatrix} \quad (7)$$

або

$$\frac{d}{dt} \bar{x}_1 = A_{УВ-1} \bar{x}_1 + B_{УВ-1} \bar{u}_1, \quad (8)$$

де  $\bar{x}_1 = (\bar{x}_{11}, \bar{x}_{12}, \bar{x}_{13})$  – вектор стану ОУВ-1;  
 $\bar{u}_1 = (\bar{u}_{11}, \bar{u}_{12}, \bar{u}_{13})$  – вектор управління (управляюче рішення) КОУВ-1;

$$A_{УВ-1} = \begin{pmatrix} A_{УВ-11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{УВ-12} & 0 \\ 0 & 0 & A_{УВ-13} \end{pmatrix}$$

та

$$B_{УВ-1} = \begin{pmatrix} B_{УВ-11} & 0 & 0 \\ 0 & B_{УВ-12} & 0 \\ 0 & 0 & B_{УВ-13} \end{pmatrix} \quad (9)$$

– оператори, які описують процеси контролю та планування застосування ОУВ-1 відповідно; для ОУВ-2 –

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \\ \bar{x}_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{УВ-21} & 0 & 0 \\ 0 & A_{УВ-22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{УВ-23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \bar{x}_{21} \\ \bar{x}_{22} \\ \bar{x}_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{УВ-21} & 0 & 0 \\ 0 & B_{УВ-22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{УВ-23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{u}_{21} \\ \bar{u}_{22} \\ \bar{u}_{23} \end{pmatrix} \quad (10)$$

або

$$\frac{d}{dt} \bar{x}_2 = A_{УВ-2} \bar{x}_2 + B_{УВ-2} \bar{u}_2, \quad (11)$$

де  $\bar{x}_2 = (\bar{x}_{21}, \bar{x}_{22}, \bar{x}_{23})$  – вектор стану ОУВ-2;  
 $\bar{u}_2 = (\bar{u}_{21}, \bar{u}_{22}, \bar{u}_{23})$  – вектор управління (управляюче рішення) КОУВ-2;

$$A_{УВ-2} = \begin{pmatrix} A_{УВ-21} & 0 & 0 \\ 0 & A_{УВ-22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{УВ-23} \end{pmatrix}$$

та

$$B_{УВ-2} = \begin{pmatrix} B_{УВ-21} & 0 & 0 \\ 0 & B_{УВ-22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{УВ-23} \end{pmatrix} \quad (12)$$

– оператори, які описують процеси контролю та планування застосування ОУВ-2 відповідно; для ОУВ-3 –

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \bar{x}_{31} \\ \bar{x}_{32} \\ \bar{x}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{УВ-31} & 0 & 0 \\ 0 & A_{УВ-32} & 0 \\ 0 & 0 & A_{УВ-33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \bar{x}_{31} \\ \bar{x}_{32} \\ \bar{x}_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{УВ-31} & 0 & 0 \\ 0 & B_{УВ-32} & 0 \\ 0 & 0 & B_{УВ-33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{u}_{31} \\ \bar{u}_{32} \\ \bar{u}_{33} \end{pmatrix} \quad (13)$$

або

$$\frac{d}{dt} \bar{x}_3 = A_{УВ-3} \bar{x}_3 + B_{УВ-3} \bar{u}_3, \quad (14)$$

де  $\bar{x}_3 = (\bar{x}_{31}, \bar{x}_{32}, \bar{x}_{33})$  – вектор стану ОУВ-3;  
 $\bar{u}_3 = (\bar{u}_{31}, \bar{u}_{32}, \bar{u}_{33})$  – вектор управління (управляюче рішення) КОУВ-3;

$$A_{УВ-3} = \begin{pmatrix} A_{УВ-31} & 0 & 0 \\ 0 & A_{УВ-32} & 0 \\ 0 & 0 & A_{УВ-33} \end{pmatrix}$$

та

$$B_{УВ-3} = \begin{pmatrix} B_{УВ-31} & 0 & 0 \\ 0 & B_{УВ-32} & 0 \\ 0 & 0 & B_{УВ-33} \end{pmatrix} \quad (15)$$

– оператори, які описують процеси контролю та планування застосування ОУВ-3 відповідно.

Аналогічно для системи управління оперативно-стратегічним угрупованням військ (далі – ОСУВ) можна записати таку систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{УВ-1} & 0 & 0 \\ 0 & A_{УВ-2} & 0 \\ 0 & 0 & A_{УВ-3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{УВ-1} & 0 & 0 \\ 0 & B_{УВ-2} & 0 \\ 0 & 0 & B_{УВ-3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{pmatrix} \quad (16)$$

або у загальному вигляді –

$$\frac{d}{dt} \bar{x} = A \bar{x} + B \bar{u}, \quad (17)$$

де  $\bar{x} = (\bar{x}_{11}, \bar{x}_{12}, \bar{x}_{13}, \bar{x}_{21}, \bar{x}_{22}, \bar{x}_{23}, \bar{x}_{31}, \bar{x}_{32}, \bar{x}_{33})^T$  – вектор-стовпець стану ОСУВ;

$\bar{u} = (\bar{u}_{11}, \bar{u}_{12}, \bar{u}_{13}, \bar{u}_{21}, \bar{u}_{22}, \bar{u}_{23}, \bar{u}_{31}, \bar{u}_{32}, \bar{u}_{33})^T$  – вектор-стовпець управління (управляюче рішення) ОСУВ;

$A$  і  $B$  – оператори, які описують процеси контролю та планування застосування ОСУВ відповідно, які задаються наступними діагональними матрицями:

$$A = \begin{pmatrix} A_{AB-11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{AB-12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{AB-13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{AB-21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{AB-22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{AB-23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{AB-31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{AB-32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{AB-33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{AB-11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{AB-12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{AB-13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{AB-21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{AB-22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{AB-23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{AB-31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{AB-32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{AB-33} \end{pmatrix} \quad (18)$$

Оператори (18) є клітинними матрицями, які, у свою чергу, складаються з клітинних матриць (9), (12) та (15) і можуть бути представлені прямими сумами:

$$A = (A_{УВ-11} \oplus A_{УВ-12} \oplus A_{УВ-13}) \oplus (A_{УВ-21} \oplus A_{УВ-22} \oplus A_{УВ-23}) \oplus (A_{УВ-31} \oplus A_{УВ-32} \oplus A_{УВ-33}) =, \quad (19)$$

$$= A_{УВ-1} \oplus A_{УВ-2} \oplus A_{УВ-3}$$

де  $A_{УВ-1} = A_{УВ-11} \oplus A_{УВ-12} \oplus A_{УВ-13}$ ,

$A_{УВ-2} = A_{УВ-21} \oplus A_{УВ-22} \oplus A_{УВ-23}$  та

$A_{УВ-3} = A_{УВ-31} \oplus A_{УВ-32} \oplus A_{УВ-33}$

– оператори процесу контролю застосування УВ-1, УВ-2 та УВ-3;

$$B = (B_{УВ-11} \oplus B_{УВ-12} \oplus B_{УВ-13}) \oplus (B_{УВ-21} \oplus B_{УВ-22} \oplus B_{УВ-23}) \oplus (B_{УВ-31} \oplus B_{УВ-32} \oplus B_{УВ-33}) =, \quad (20)$$

$$= B_{УВ-1} \oplus B_{УВ-2} \oplus B_{УВ-3}$$

де  $B_{УВ-1} = B_{УВ-11} \oplus B_{УВ-12} \oplus B_{УВ-13}$ ,

$B_{УВ-2} = B_{УВ-21} \oplus B_{УВ-22} \oplus B_{УВ-23}$  та

$B_{УВ-3} = B_{УВ-31} \oplus B_{УВ-32} \oplus B_{УВ-33}$

– оператори процесу планування застосування УВ-1, УВ-2 та УВ-3.

Блок-схему системи управління ОСУВ наведено на рис. 7.

Отже, аналіз виразів (19) та (20) свідчить, що ієрархічні багаторівневі системи управління можуть бути описані диференціальними рівняннями типу (17), у яких оператори представляють собою клітинні матриці.

Розглянемо ієрархічну  $m$ -рівневу систему управління ОСУВ (рис. 8). Відповідно до виразу (17) для  $m$ -рівневої ієрархічної системи управління

можна записати наступне диференціальне рівняння:

$$\frac{d}{dt} \bar{x} = A\bar{x} + B\bar{u}, \quad (20)$$

де  $\bar{x} = \{\bar{x}_{i_1 i_2 \dots i_m}\}$  – вектор-стовпець стану ОСУВ;

$\bar{u} = \{\bar{u}_{i_1 i_2 \dots i_m}\}$  – вектор-стовпець управління (управляюче рішення) ОСУВ;

$i_1, i_2, \dots, i_m$  – індекси 1-го, 2-го та  $m$ -го рівнів ієрархічної СУ,  $i_1 = \overline{1, n^{(1)}}$ ,  $i_2 = \overline{1, n_{i_1}^{(2)}}$ , ...,

$i_m = \overline{1, n_{i_{m-1}}^{(m)}}$ ;

$n^{(0)}$  – кількість УВ, які перебувають на 1-му рівні;

$n_{i_1}^{(2)}$  – кількість УВ, які перебувають на 2-му рівні та підпорядковані  $i_1$ -му УВ, який перебуває на 1-му рівні;

...

$n_{i_{m-1}}^{(m)}$  – кількість УВ, які перебувають на  $m$ -му

рівні та підпорядковані  $i_{m-1}$ -му УВ, який перебуває на  $(m-1)$ -му рівні;

$$A = A_{УВ-1} \oplus A_{УВ-2} \oplus \dots \oplus A_{УВ-i_1} \oplus \dots \oplus A_{УВ-n^{(0)}} \quad \text{та}$$

$$B = B_{УВ-1} \oplus B_{УВ-2} \oplus \dots \oplus B_{УВ-i_1} \oplus \dots \oplus B_{УВ-n^{(0)}} -$$

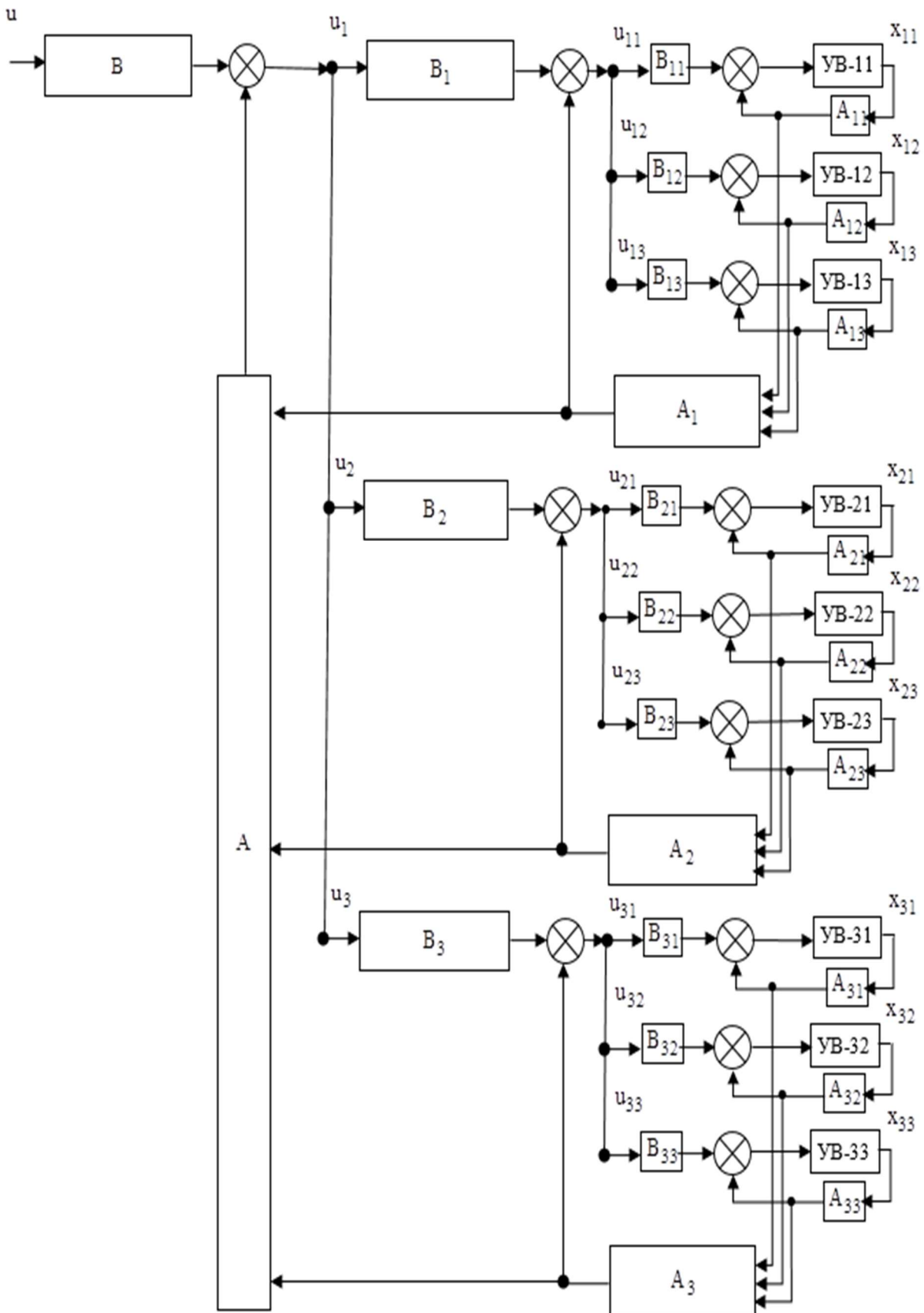


Рисунок 7 – Блок-схема системи управління оперативно-стратегічним угрупованням військ



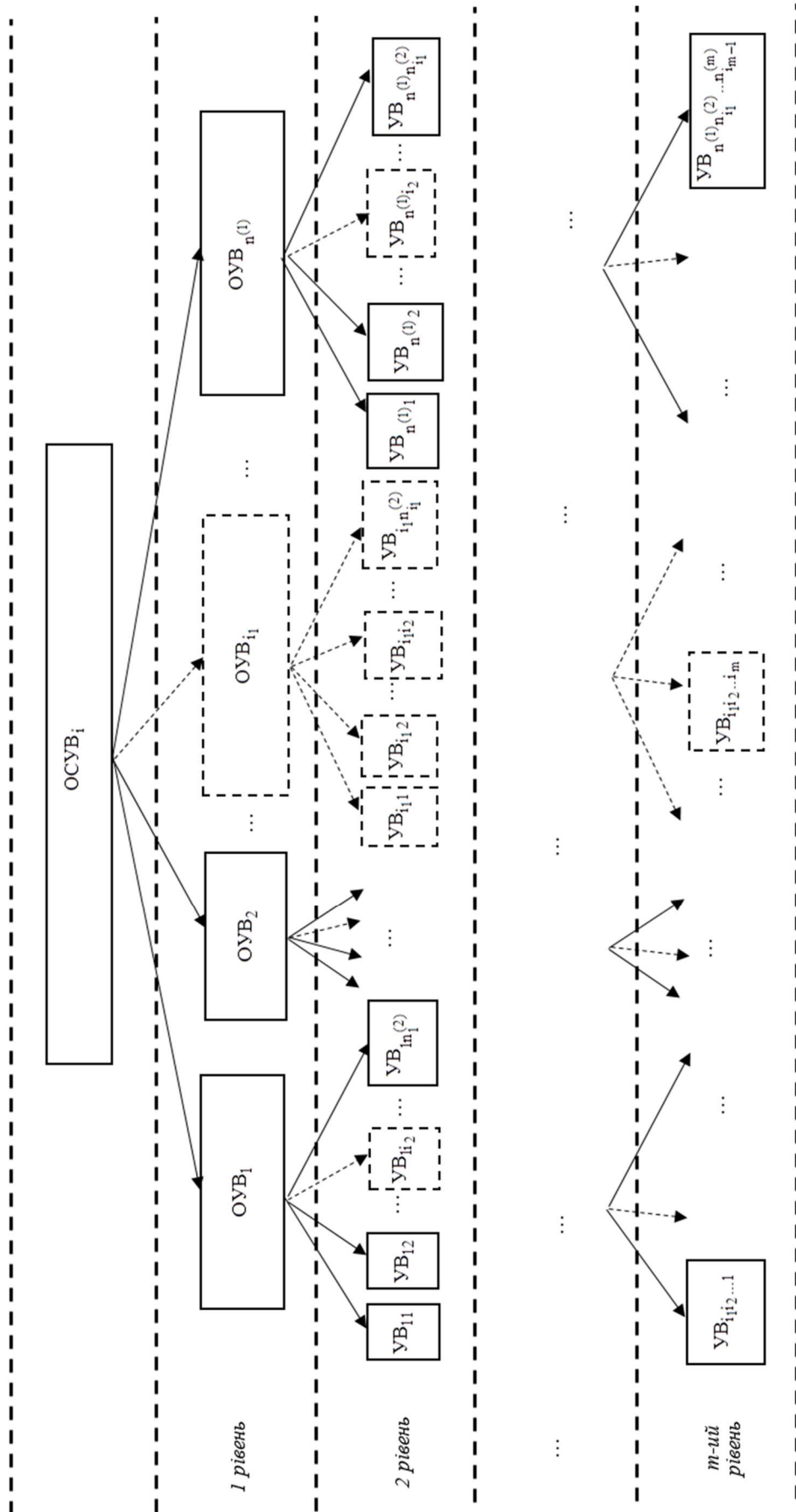


Рисунок 8 – Ієрархічна m-рівнева система управління оперативно-стратегічним угрупованням військ

– оператори, які описують процеси контролю та вироблення управлінського рішення щодо застосування ОСУВ відповідно;

$$A_{УВ-i_1} = A_{УВ-i_11} \oplus A_{УВ-i_12} \oplus \dots \oplus A_{УВ-i_1i_2} \oplus \dots \oplus A_{УВ-n}^{(0)}_{n_1^{(1)}}$$

та

$$V_{УВ-i_1} = V_{УВ-i_11} \oplus V_{УВ-i_12} \oplus \dots \oplus V_{УВ-n}^{(0)}_{n_1^{(1)}}$$

– оператори, які описують процеси контролю та вироблення управлінського рішення щодо застосування УВ 1-го рівня відповідно;

$$A_{УВ-i_1i_2} = A_{УВ-i_1i_21} \oplus A_{УВ-i_1i_22} \oplus \dots \oplus A_{УВ-i_1i_2i_3} \oplus \dots \oplus A_{УВ-n}^{(0)}_{n_1^{(1)}n_2^{(2)}}$$

та

$$V_{УВ-i_1i_2} = V_{УВ-i_1i_21} \oplus V_{УВ-i_1i_22} \oplus \dots \oplus V_{УВ-n}^{(0)}_{n_1^{(1)}n_2^{(2)}}$$

– оператори, які описують процеси контролю та вироблення управлінського рішення щодо застосування УВ 2-го рівня відповідно;

...

$$A_{УВ-i_1i_2\dots i_m} = A_{УВ-i_1i_2\dots i_m1} \oplus A_{УВ-i_1i_2\dots i_m2} \oplus \dots \oplus A_{УВ-i_1i_2i_3\dots i_m} \oplus \dots \oplus A_{УВ-n}^{(0)}_{n_1^{(1)}n_2^{(2)}\dots n_{m-1}^{(m)}}$$

### Список бібліографічних посилань

1. Україна. Президент (2014–2019; П. О. Порошенко). Указ Президента України від 06.06.2016 № 240/2016. «Про Стратегічний оборонний бюлетень України». Київ : Адміністрація Президента України, 2016. 61 с.
2. Україна. Президент (2014–2019; П. О. Порошенко). Указ Президента України від 14.03.2016 № 92/2016 «Про Концепцію розвитку сектору безпеки і оборони України». Київ : Адміністрація Президента України, 2016. 45 с.
3. Ткаченко В. І., Смірнов Є. Б. та ін. Теорія прийняття рішень органами військового управління: монографія / за ред. В. І. Ткаченка, Є. Б. Смірнова. Харків : ХНУАП, 2008. 545 с.
4. Островський С. М. Обґрунтування вимог до системи управління оперативного угруповання військ: дис. ... канд. військ. наук: 20.02.12 / Островський Сергій Миколайович. Київ: ЦНДІ ЗС України, 2019. 187 с.
5. Кірсанов С. О. Методичні основи математичного

та

$$V_{УВ-i_1i_2\dots i_m} = V_{УВ-i_1i_2\dots i_m1} \oplus V_{УВ-i_1i_2\dots i_m2} \oplus \dots \oplus V_{УВ-i_1i_2i_3\dots i_m} \oplus \dots \oplus V_{УВ-n}^{(0)}_{n_1^{(1)}n_2^{(2)}\dots n_{m-1}^{(m)}}$$

– оператори, які описують процеси контролю та вироблення управлінського рішення щодо застосування УВ  $m$ -го рівня.

### Висновки й перспективи подальших досліджень

Отже, у статті висвітлено математичну модель багаторівневої ієрархічної системи управління військами (силами), яка базується на основних положеннях теорії управління, а також методах і алгоритмах, які застосовуються у цій теорії для вирішення практичних завдань.

Запропонована математична модель дає змогу дослідити властивості багаторівневої ієрархічної системи управління, а також вплив рівнів управління військами на ефективність управління військами. Крім того модель може бути використана для оптимізації структури управління Збройними Силами, а також для розроблення практичних рекомендацій щодо раціонального розподілу управлінських функцій та підвищення ефективності виконання завдань на всіх рівнях управління військами.

З метою забезпечення єдиної ідеології, модель має стати аналітичною та імітаційною основою розвитку теорії системи управління військами, що є перспективним напрямом подальших досліджень.

модельовання функціонування автоматизованої системи управління військами: дис. ... докт. техн. наук: 01.05.02 / Кірсанов Сергій Олександрович. Київ : ЦНДІ ЗС України, 2023. 537 с.

6. Довідник з теорії автоматичного управління / під ред. А. А. Красовського. Москва : «Наука», 1987. 712 с.

7. Алтухов П. Основы теории управления войсками. Москва : Военное издательство, 1984. 222 с.

8. Фурманов К. В., Шовкошитний І. І., Тимофеев А. В. Щодо обґрунтування вимог до процесу управління видами оперативного забезпечення. *Зб. наук. праць ЦНДІ ЗС України*. 2012. № 3(61). С. 53–63.

9. Месарович М., Мако Д., Такаха І. Теория иерархических многоуровневых систем. Москва : Мир, 1973. 344 с.

10. Павленко П. М., Філоненко С. Ф., Чередніков О. М., Трейтяк В. В. Математичне моделювання систем і процесів: навч. посіб. Київ : НАУ, 2017. 392 с.

## MATHEMATICAL MODEL OF THE HIERARCHICAL SYSTEM OF TROOP MANAGEMENT

*Husak Yurii (Doctor of Military Sciences, Professor) <sup>1</sup>*

*Kirsanov Serhii (Doctor of Technical Sciences, Senior Researcher) <sup>2</sup>*

*Vlasiuk Viktor (Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher) <sup>2</sup>*

*Starynskyi Ivan (Candidate of Technical Sciences) <sup>1</sup>*

*Shovkoshytnyi Ihor (Candidate of Military Science, Senior Research Fellow) <sup>1</sup>*

<sup>1</sup> *National Defence University of Ukraine, Kyiv, Ukraine*

<sup>2</sup> *Central Research Institute of the Armed Forces of Ukraine, Kyiv, Ukraine*

**Problem Statement.** One of the priority tasks of Ukraine's defense reform is to establish an effective troop management system. The current system does not meet the necessary requirements due to the lack of adequate methods for evaluating and substantiating management requirements. Therefore, developing a new mathematical model that enables the analysis of interactions between different levels of management is a relevant scientific task to enhance the efficiency of troop management systems.

**Research Methods.** The study applies elements of control theory, including a multi-parameter identification method, simulation modeling, and a combined decision optimization approach to develop a universal mathematical model for troop management analysis.

**Analysis of Recent Research and Publications.** The analysis of current methods for troop management reveals that they are fragmented and primarily focus on substantiating management requirements, evaluating management components, and organizing command post operations. Existing approaches rely on coefficient-based modeling, which lacks a unified methodology and results in subjective determinations of requirements. The need for a comprehensive methodological framework that meets modern management demands remains unmet.

**Main Material Presentation.** This study presents a mathematical model for hierarchical troop management based on control theory. The model, comprising strategic, operational, and tactical levels, uses differential equations to describe management processes. It analyzes each level's impact on efficiency, identifying requirements for an optimized structure. The approach highlights interdependencies among levels, improving the system's overall efficiency and adaptability.

**Elements of Scientific Novelty.** This research presents a novel mathematical model that describes changes in the state of the command post under the influence of various factors, based on different physical principles. By calculating operational management efficiency through management cycle duration and the probability of the command post remaining operational, the model provides a unique method for evaluating dynamic changes in troop management during deployment. This approach enables more accurate forecasting and adaptability in military management processes.

**Theoretical and Practical Significance of the Article.** The theoretical significance lies in advancing methods for evaluating the operational management of troop groupings, enhancing understanding of hierarchical management processes. Practically, the model can be applied by military command bodies of the Armed Forces of Ukraine and research institutions to identify and address management issues during troop deployment, improving efficiency and combat readiness across all management levels.

**Conclusions and Future Research Prospects.** The model enables comprehensive assessment and forecasting of operational management changes during troop deployments, enhancing decision-making and adaptability in dynamic conditions. Future research will aim to define requirements for an advanced system to maintain optimal troop combat readiness.

**Keywords:** mathematical model, troop command system, management theory, multilevel hierarchical command system, troop grouping.

## References

1. **Ukrayina. Prezydent** (2014–2019; P. O. Poroshenko). Ukaz Prezydenta Ukrayiny vid 06.06.2016 № 240/2016. «On the Strategic Defence Bulletin of Ukraine»: Kyiv: Administratsiya Prezydenta Ukrayiny.
2. **Ukrayina. Prezydent** (2014–2019; P. O. Poroshenko). Ukaz Prezydenta Ukrayiny vid 14.03.2016 № 92/2016 «On the Concept of Development of the Security and Defence Sector of Ukraine». Kyiv: Administratsiya Prezydenta Ukrayiny.
3. **Tkachenko, V. I., Smirnov, Ye. B. ta in.**, (2008). Theory of Decision-Making by Military Command and Control Bodies: monohrafiya / za red. V. I. Tkachenka, Ye. B. Smirnova. Kharkiv: KNUAP.
4. **Ostrovskyy, S. M.**, (2019). Substantiation of requirements for the command and control system of an operational group of troops: dys. ... kand. viys'k. nauk: 20.02.12 / Ostrovskyy Serhiy Mykolayovych. Kyiv: TsNDI ZS Ukrayiny.
5. **Kirsanov, S. O.**, (2023). Substantiation of requirements for the command and control system of an operational group of troops: dys. ... dokt. tekhn. nauk: 01.05.02 / Kirsanov Serhiy Oleksandrovysh. Kyiv: TsNDI ZS Ukrayiny.
6. **Handbook of automatic control theory**, (1987)/ pid red. A. A. Krasov's'koho. Moskva : Nauka.
7. **Altukhov, P.** Fundamentals of the theory of military control. Moskva : Military publishing house, 1984.
8. **Furmanov, K. V., Shovkoshitny, I. I., Timofeev, A. V.**, (2012). Priming was able to manage the types of operational security before the process. *Collection of scientific works of the Central Scientific Research and Development Center of Ukraine*. 3(61), 53–63.
9. **Mesarovic, M., Mako, D., & Takahara, I.** Theory of Hierarchical Multilevel Systems. Moscow: Mir, 1973.
10. **Pavlenko, P. M., Filonenko, S. F., Cherednikov, O. M., & Tretyak, V. V.** Mathematical Modeling of Systems and Processes: textbook. Kyiv : NAU, 2017.