DOI:**10.33099/2311-7249/2023-46-1-5-12**

УДК: 004.72

Вадим Іванович Слюсар ***(доктор технічних наук, професор)*** [1]
Катерина Андріївна Громлюк [2]

[1]***Центральний науково-дослідний інститут ОВТ Збройних Сил України, Київ, Україна***
[2]***Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації, Київ, Україна***

УДОСКОНАЛЕНИЙ МЕТОД ДЕЙКСТРИ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ НАЙКОРОТШИХ МАРШРУТІВ МІЖ ВУЗЛАМИ ЗВ'ЯЗКУ У СИСТЕМІ ВІЙСЬКОВОГО ЗВ'ЯЗКУ

У статті удосконалено метод Дейкстри для системи військового зв'язку завдяки використанню матриці інцидентності вузлів і ліній зв'язку замість матриці інцидентності вузлів. Удосконалений метод адаптовано до моделі системи військового зв'язку, що формалізується блоковою матрицею інцидентності вузлів і ліній зв'язку з поділом блоків матриці за родами і складовими системи військового зв'язку. Суть удосконалення полягає у введені додаткових блоків до стандартного алгоритму Дейкстри з метою попереднього, точнішого обчислення вагових коефіцієнтів ліній зв'язку. Водночас, на основі використання блокової матриці вторинної інцидентності, а також квадратичної форми матриці інцидентності, запропоновано низку нових аналітичних виразів. Математичне моделювання, на основі спрощеної моделі системи військового зв'язку, підтвердило ефективність удосконаленого методу. Синтезований удосконалений метод точніше відповідає реальним умовам управління системою військового зв'язку і може бути використаний для потреб автоматизації процесу управління системою як основи для розробки інформаційно-аналітичних завдань.

Ключові слова: *метод Дейкстри; багатошаровий граф; блокова матриця; блоковий торцевий добуток матриць; матриця інцидентності.*

Вступ

Постановка проблеми. В умовах ведення бойових дій важливого значення набувають пошук оптимальних маршрутів проходження інформації, логістичних (транспортних) напрямків, побудови оборонних рубежів, виконання інших завдань, що пов'язані з питаннями оптимізації і можуть бути формалізовані на основі теорії графів і складних мереж [1 – 4].

Для виконання завдання пошуку оптимального шляху в графах існує значна кількість методів: неінформативні методи; інформативні; пошуку найменшого шляху; мінімального остовного дерева та інші. Пропонується розглянути один із методів пошуку найкоротшого шляху – широко відомий алгоритм Дейкстри. Алгоритм був розроблений у 1959 році нідерландським вченим Едсгером Дейкстрою для вирішення завдання пошуку всіх найкоротших шляхів з однієї, наперед заданої, вершини графа до всіх інших [5; 6].

Алгоритм Дейкстри відноситься до родини жадібних алгоритмів [7]. Жадібні алгоритми – прості та прямолінійні евристичні алгоритми, що приймають оптимальні рішення, виходячи з наявних на кожному етапі даних [8], не зважаючи на можливі наслідки, сподіваючись, зрештою, отримати оптимальний розв'язок. Вони необтяжливі у процесі реалізації та є ефективнішими за часом виконання. Водночас чимало задач не можуть бути розв'язані за їх допомогою.

Недоліками даного методу є неможливість обробки графів, в яких є ребра з негативною вагою. Також під час застосування алгоритму Дейкстри необхідно дотримуватися припущення про відсутність петель на маршруті (замкнутих колових маршрутів). У такому випадку доцільно користуватися відмінним від алгоритму Дейкстри методом. Наприклад, алгоритмом Беллмана-Форда, який також знаходить найкоротші шляхи, але передбачає існування у графі ребер з негативною вагою [9; 10]. Проте, обмежимося у статті розглядом лише алгоритму Дейкстри на прикладі системи військового зв'язку..

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Для удосконалення методу Дейкстри скористаємося аналітичними виразами, що запропоновані професором В. І. Слюсарем у роботах [11; 12], для аналізу топології мереж зв'язку між операціями з матрицями інцидентності вузлів та ліній зв'язку на основі торцевого і транспонованого торцевого добутку матриць [13–15]. На основі заявленого підходу окреслимо систему військового зв'язку у вигляді багатошарового графа, де кожен шар графу відповідає повному роду військового зв'язку. Для цього в роботі [16] запропонувала аналітичну модель системи військового зв'язку на основі її подання у вигляді блокової матриці інцидентності вузлів і ліній військового зв'язку, де кожен блок відповідає певному роду військового зв'язку. Також було отримано блокові матриці вторинної інцидентності і квадратичні форми блокових матриць інцидентності

Мета статті. Метою статті є удосконалення методу Дейкстри завдяки впровадженню блокових матриць інцидентності, блокових матриць вторинної інцидентності, квадратичних форм матриць інцидентності вузлів і ліній зв'язку, що синтезовані у [16] для формалізації опису системи військового зв'язку

Виклад основного матеріалу дослідження

Вважатимемо, що негативні ваги ребер (ліній зв'язку) і петлі на маршрутах у графі (системі військового зв'язку) відсутні. Наведемо перелік кроків алгоритму Дейкстри: встановлюємо відстань до однієї, наперед заданої вершини графа, рівною нулю; встановлюємо відстань до решти вершин на нескінченне значення; вибираємо не відмічену вершину графа, що знаходиться на найменшій відстані від початкової вершини і відмічаємо її; обчислюємо відстань до інцидентних вершин, обираючи найменшу відстань при кожному оцінюванні; відмічаємо наступний вузол; проводимо ітерацію за наведеними кроками, поки всі вершини не будуть відмічені.

У програмі, що знаходить найближчі шляхи між вершинами за допомогою методу Дейкстри, граф наводитиметься у вигляді не бінарної матриці інцидентності вершин графа [5; 6]. Замість одиниць в ній встановлюються ваги ребер, нулі свідчать про відсутність ребер між вершинами. На рисунку 1 наведено приклад графа із шести вершин і семи ребер зі встановленими вагами.

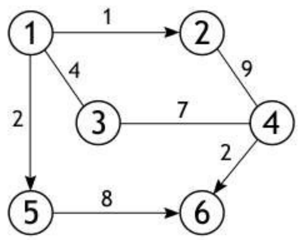

Рис. 1. Приклад графа із шести вершин і семи ребер зі встановленими вагами ребер

Складемо матрицю інцидентності, що необхідна для реалізації програмного методу Дейкстри (рис. 1). Вона описує інцидентність вершин графа між собою і матиме такий вигляд:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

За умови встановлення для ребер між i-ми і j-ми вершинами графа вагових коефіцієнтів ω_{ij}, що наведені на рисунку 1, матриця інцидентності вершин трансформується до іншого вигляду (2):

$$Q_{VK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 7 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Наведений масив використовується у методі Дейкстри, як основа для проведення подальших обчислень. При цьому вагові коефіцієнти ω_{ij} відповідають експлуатаційним витратам для кожної із ліній зв'язку.

Відповідно до [17], лінія зв'язку (лінія передачі інформації) – сукупність технічних пристроїв і фізичного середовища, що забезпечують передавання електричних сигналів одного, двох або багатьох каналів зв'язку на відстань. Аналіз структури ліній зв'язку свідчить, що вони складаються із засобів зв'язку вузлів зв'язку з навченим персоналом, який їх експлуатує, і за необхідності, фізичного середовища розповсюдження сигналу (кабелі зв'язку, оптичне волокно, тощо), що також розгортається і утримується структурними підрозділами одного із вузлів зв'язку. Звідси можливо перейти до розгляду вагового коефіцієнту ω_{ij} лінії зв'язку між *i*-тим та *j*-тим вузлами зв'язку як суми експлуатаційних витрат *i*-го вузла зв'язку ω_i, *j*-го вузла зв'язку ω_j і витрат на утримання фізичної лінії зв'язку одним із вузлів зв'язку $\omega_{Fi(j)}$.

Можливий також варіант організації лінії передачі у вигляді мереж зв'язку, коли одна головна станція працюватиме з декількома абонентами мережі й збільшення кількості абонентів такої мережі не буде здійснювати спричинятиме збільшення вартості функціонування засобів зв'язку головного вузла зв'язку означеної мережі.

Проведений аналіз свідчить, що під час фактичного застосування методу Дейкстри для формування матриці інцидентності вузлів зв’язку з ваговими коефіцієнтами необхідно провести попередні значні і доволі складні обчислення вагових коефіцієнтів ліній зв’язку. Водночас зрозуміло, що в реальних умовах виконання завдань за призначенням частинами і підрозділами зв’язку, проведення обчислень вагових коефіцієнтів для ліній і мереж військового зв’язку є не можливим. Реальнішим може бути варіант проведення завчасних обчислень для окремих вузлів зв’язку, що експлуатують штатні зразки техніки зв’язку і мають типові штати. Такий підхід є більш реалістичним і дозволяє відмовитися від застосування матриці інцидентності вузлів зв’язку і перейти до матриці інцидентності вершини та ліній зв’язку [11; 12], а також до методу, що запропонований у роботі [16].

Для наочнішого подання розглянемо запропонований підхід на прикладі системи військового зв’язку, що складається з двох шарів, трьох вузлів зв’язку, двох ліній зв’язку у кожному шарі (рис. 2).

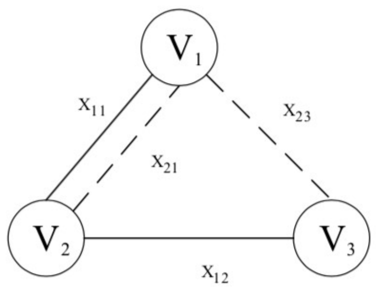

Рис. 2. Багатошарова система військового зв’язку з розподілом шарів за родами військового зв’язку

Матриця інцидентності вузлів та ліній системи військового зв’язку матиме такий вигляд (3):

$$G = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \qquad (3)$$

За такої умови значення одиниці для кожного з вузлів і ліній зв’язку означатиме, що вони поєднані між собою. Для доступнішого сприйняття виразу (3) наведемо його у вигляді таблиці 1.

Таблиця 1

Таблиця інцидентності вершин та ребер багатошарового графу

Порядковий номер вершини	Порядковий номер ребер у шарах багатошарового графу					
	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{21}	X_{22}	X_{23}
V_1	1	0	0	1	0	1
V_2	1	1	0	1	0	0
V_3	0	1	0	0	0	1

За переходу до вагових коефіцієнтів їх значення будуть відповідати експлуатаційним витратам для підтримання функціонування лінії зв’язку окремо для кожного вузла зв’язку. За реальних умов функціонування об’єднаної системи військового зв’язку, модель, що наведена на рисунку 2, є доволі спрощеною. За умови формування блоків у матриці інцидентності за родами військового зв’язку і подальшим формуванням субблоків, у блоках за типами апаратури зв’язку, доволі просто перейти до формування матриці інцидентності вершин і ліній зв’язку з ваговими коефіцієнтами. Як приклад розглянемо об’єднану систему військового зв’язку, що описується блоковою матрицею інцидентності вузлів і ліній зв’язку такого вигляду (4) [16]:

$$G = \left[\begin{array}{c|c|c|c} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1n} \\ \hline G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline G_{m1} & G_{m2} & \cdots & G_{mn} \end{array}\right], \qquad (4)$$

де

$$G_{11} = \begin{bmatrix} g_{1_1 1_1} & \cdots & g_{1_1 j_1} \\ \vdots & \therefore & \vdots \\ g_{i_1 1_1} & \cdots & g_{i_1 j_1} \end{bmatrix}, \ldots, G_{mn} = \begin{bmatrix} g_{1_m 1_n} & \cdots & g_{1_m j_n} \\ \vdots & \therefore & \vdots \\ g_{i_m 1_n} & \cdots & g_{i_m j_n} \end{bmatrix}$$

є елементами блокової матриці, що відповідають матрицям інцидентності ребер і вершин у кожному із шарів багатошарового графу;

j – номер стовпця, що відповідає відповідній лінії зв’язку в блоках блокової матриці;

i – номер рядка, що відповідає відповідному номеру вузла зв’язку у кожній зі складових об’єднаної системи військового зв’язку;

n – індекс номера блоку, що відповідає розподілу за родами військового зв’язку;

m – індекс номера блоку, що відповідає розподілу за складовими об’єднаної системи військового зв’язку.

За такої умови блоки $G_{11} - G_{1n}$, … , $G_{m1} - G_{mn}$ будуть відповідати кожній зі складових об’єднаної системи військового зв’язку з їх поділом за родами військового зв’язку.

Для того щоб обчислити матрицю інцидентності вузлів і ліній військового зв’язку з урахуванням вагових коефіцієнтів потрібно сформувати, узгоджено зі структурою блокової матриці інцидентності G, матрицю вагових коефіцієнтів за родами військового зв’язку F і знайти її добуток із матрицею інцидентності вершин і ребер графа відповідно до виразу (5):

$$G_{VK} = F[\otimes]G, \qquad (5)$$

де $F = \left[\begin{array}{c:c:c:c} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ \hdashline f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \hdashline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hdashline f_{m1} & f_{m2} & \cdots & f_{mn} \end{array}\right]$ – блокова матриця вагових коефіцієнтів, що формується за родами військового зв’язку;

$[\otimes]$ – символ блокового добутку Кронекера.

У розглянутому випадку кожен ваговий коефіцієнт f_{mn} зі складу матриці F матиме скалярне значення. Тому, під час виконання операції добутку матриць, вираз (5), буде знайдено добуток кожного блоку матриці G зі встановленим для кожного роду військового зв’язку числовим значенням вагового коефіцієнту. На випадок подальшого ускладнення матриці G, з розподілом не лише за родами військового зв’язку, а й за типами апаратури зв’язку, що використовується, або неоднаковими ваговими коефіцієнтами для різних вузлів і ліній зв’язку, структура матриці F також ускладниться. Заразом від блокового добутку Кронекера у виразі (5) потрібно перейти до блокового добутку Адамара. Вираз (5) трансформується і набуде такого вигляду (6):

$$G_{VK} = F[\circ]G\,, \qquad (6)$$

де $[\circ]$ – блоковий добуток Адамара.

За такого застосування наведеного підходу, у процесі прийняття управлінських рішень щодо топології структури системи військового зв’язку, представнику органу управління військовим зв’язком не потрібно проводити обчислення вагових коефіцієнтів для кожної лінії зв’язку. Визначення вагових коефіцієнтів можна покласти на чергову зміну пунктів управління вузлами зв’язку із заповненням відповідного рядка, що відповідає вузлу зв’язку у загальній таблиці. В умовах швидкоплинних бойових дій це сприятиме оперативності у прийнятті відповідних управлінських рішень. З метою обчислення вагових коефіцієнтів ребер для кожного шару системи військового зв’язку необхідно провести операцію підсумовування за стовпцями, що відповідають лініям зв’язку.

Для спрощення сприйняття матеріалу повернемося до системи військового зв’язку, що наведений на рисунку 2. Встановимо припущення, що вагові коефіцієнти складають: для першого шару 20; для другого 30. За таких умов матриця вагових коефіцієнтів набуде такого вигляду $F = [f_1 \,\vdots\, f_2] = [20 \,\vdots\, 30]$. Після проведення обчислень за виразом (5) блокова матриця інцидентності з ваговими коефіцієнтами буде такою: $G_{VK} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 20 & 0 & 0 & 30 & 0 & 30 \\ 20 & 20 & 0 & 30 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 30 \end{array}\right]$.

Для подальшого обчислення вагових коефіцієнтів ліній зв’язку $VK_{ЛЗ}$ необхідно підсумувати значення у стовбцях матриці. Скористаємося виразом (6):

$$VK_{ЛЗ} = 1G_{VK}\,, \qquad (6)$$

де 1 – узгоджений з блоковою матрицею інцидентності блоковий одиничний вектор-рядок.

Проведемо обчислення для варіанту системи військового зв’язку, що розглядається на рис. 2.

$$VK_{ЛЗ} = 1G^{T}{}_{VK} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc:ccc} 20 & 20 & 0 & 30 & 30 & 0 \\ 0 & 20 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30 & 0 & 30 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc:ccc} 40 & 40 & 0 & 60 & 0 & 60 \end{array}\right].$$

Для пояснення фізичного змісту сформуємо отримані значення у вигляді таблиці 2.

Таблиця 2

Таблиця вагових коефіцієнтів ліній зв’язку у системі військового зв’язку

Номер лінії зв’язку	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{21}	X_{22}	X_{23}
Ваговий коефіцієнт	40	40	0	60	0	60

Наступним кроком, в узагальнені наведеного підходу, є використання для визначення вагових коефіцієнтів ліній зв’язку матриці вторинної інцидентності вершин графа, що описана у [16], таким виразом (7):

$$M_{BIB} = G^{T}[\square]G^{T} = \left[\begin{array}{c} G_1^T \\ \hdashline G_2^T \end{array}\right][\square]\left[\begin{array}{c} G_1^T \\ \hdashline G_2^T \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} G_1^T \square G_1^T \\ \hdashline G_2^T \square G_2^T \end{array}\right], \qquad (7)$$

або його транспонованого варіанта (8):

$$M_{BIB} = G[\blacksquare]G = [G_1 \,\vdots\, G_2][\blacksquare][G_1 \,\vdots\, G_2] = [G_1 \blacksquare G_1 \,\vdots\, G_2 \blacksquare G_2] \qquad (8)$$

Фізичний зміст обчислення матриці вторинної інцидентності можна навести у таблиці 3.

Таблиця 3

Таблиця вторинної інцидентності вершин графа за допомогою його ребер

Номер ребра графа	Комбінація вершин								
	V_1			V_2			V_3		
	V_1	V_2	V_3	V_1	V_2	V_3	V_1	V_2	V_3
X_{11}	1	1	0	1	1	0	0	0	0
X_{12}	0	0	0	0	1	1	0	1	1
X_{13}	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_{21}	1	1	0	1	1	0	0	0	0
X_{22}	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_{23}	1	0	1	0	0	0	1	0	1

Трансформуємо таблицю 3 шляхом поділу її значень на блоки, кожен з яких відповідає інцидентності кожної із вершин з іншими (табл. 4).

Таблиця 4

Таблиця вторинної інцидентності вершин графа за допомогою його ребер

Номер ребра графа	Комбінація вершин								
	V_1			V_2			V_3		
	V_1	V_2	V_3	V_1	V_2	V_3	V_1	V_2	V_3
X_{11}	1	1	0	1	1	0	0	0	0
X_{12}	0	0	0	0	1	1	0	1	1
X_{13}	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_{21}	1	1	0	1	1	0	0	0	0
X_{22}	0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_{23}	1	0	1	0	0	0	1	0	1

Враховуючи такий розподіл на блоки, скориставшись виразами (5) і (6), можна отримати блокову матрицю значень вагових коефіцієнтів ліній зв'язку інцидентних із вузлами зв'язку, окремо для кожного вузла зв'язку. За таких умов, під час формування блоків, як показано у таблиці 4, для вершини V_1, отримаємо варіант придатний для пошуку найкоротшого шляху у межах всієї системи військового зв'язку. За умови формування блоків, як наведено для вузла зв'язку V_3, отримаємо варіант придатний для пошуку найкоротшого шляху в межах кожного окремого шару системи військового зв'язку.

Обидва варіанти є необхідними у процесі планування розгортання та експлуатації системи військового зв'язку. Через високу інтенсивність ведення сучасних бойових дій, застосування противником засобів вогневого ураження, радіоелектронної боротьби, високоточної зброї система військового зв'язку повинна мати високу стійкість ще на етапі її планування. Одним із способів досягнення стійкості є комплексне застосування засобів різних родів зв'язку, що забезпечує резервування зв'язків на випадок виходу з ладу або ураження деяких комунікаційних засобів. Тому зв'язок планується як за окремими родами військового зв'язку, так і узагальнений.

Наведемо приклад застосування запропонованого авторами підходу на основі матриці вторинної інцидентності вершин із виразу (3). Сформуємо блокову матрицю за варіантом, що наведений виразом (7):

$$M_{BIB} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

З урахуванням вагових коефіцієнтів отримаємо такий варіант матриці вторинної інцидентності:

$$M_{BIB,VK} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 20 & 20 & 0 & 20 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 20 & 0 & 20 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 30 & 0 & 30 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 30 & 0 & 0 & 0 & 30 & 0 & 30 \end{array}\right]$$

Для отримання вектор-рядка вагових коефіцієнтів ліній зв'язку знайдемо добуток блокового одиничного вектор-рядка, структура якого узгоджена зі структурою матриці вагових коефіцієнтів, з самою наведеною матрицею вагових коефіцієнтів:

$$VK_{ЛЗ} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 20 & 20 & 0 & 20 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 20 & 0 & 20 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 30 & 0 & 30 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 30 & 0 & 0 & 0 & 30 & 0 & 30 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cccccc|cccccc|cccccc} 40 & 0 & 0 & 60 & 0 & 60 & 40 & 40 & 0 & 60 & 0 & 0 & 0 & 40 & 0 & 0 & 0 & 60 \end{array}\right]$$

З метою пояснення фізичного змісту отриманого результату наведемо його у вигляді таблиці 5.

У блоках таблиці сформовано інцидентність кожного окремого вузла зв'язку (вершини графа) з іншими вузлами зв'язку системи військового зв'язку за допомогою ліній зв'язку. Наявність значення вагового коефіцієнту відмінного від нуля свідчить, що лінія існує. Наявність нуля свідчить про відсутність лінії зв'язку між вузлами зв'язку.

Використання наведеного авторами підходу дозволить удосконалити алгоритм пошуку найкоротшого шляху, тобто алгоритм Дейкстри, завдяки впровадженню запропонованої процедури обчислення вагових коефіцієнтів ліній зв'язку та більш спрощеного формування масиву даних в алгоритмі. Кожен крок алгоритму потребуватиме роботи з одним із блоків з подальшим переходом до наступного блоку, що позначені у таблиці 5 (не відвіданої вершини), доки не будуть встановлені всі найкоротші шляхи з визначеного вузла зв'язку до всіх інших вузлів зв'язку в системі військового зв'язку.

Таблиця 5

Таблиця інцидентності вузлів зв'язку з лініями зв'язку з урахуванням їхніх вагових коефіцієнтів

Вузли зв'язку	Лінії вузлів зв'язку		Вагові коефіцієнти
V_1	X_{11}	V_2	40
	X_{12}	-	0
	X_{13}	-	0
	X_{21}	V_2	60
	X_{22}	-	0
	X_{23}	V_3	60
V_2	X_{11}	V_1	40
	X_{12}	V_3	40
	X_{13}	-	0
	X_{21}	V_1	60
	X_{22}	-	0
	X_{23}	-	0
V_3	X_{11}	-	0
	X_{12}	V_2	40
	X_{13}	-	0
	X_{21}	-	0
	X_{22}	-	0
	X_{23}	V_1	60

Запропоноване у статті удосконалення методу Дейкстри полягає у введені до наукового обігу п'яти кроків із визначення вагових коефіцієнтів ліній зв'язку до початку його реалізації, зокрема:

1. Складання матриці інцидентності вузлів зв'язку (вершин графа) та ліній зв'язку (ребер графа) *G*.
2. Знаходження матриці вторинної інцидентності вузлів зв'язку (вершин графа) M_{BIB}, вираз (7) або (8).
3. Формування блоків у матриці вторинної інцидентності за одним із принципів, що наведені у таблиці 4.
4. Введення до матриці вторинної інцидентності вузлів зв'язку вагових коефіцієнтів кінців ліній зв'язку $M_{BIB,VK}$.
5. Знаходження вектор-рядка вагових коефіцієнтів ліній зв'язку, вираз (6).

За допомогою застосування удосконаленого алгоритму Дейкстри можна встановити також інші параметри вузлів зв'язку. Наприклад, ексцентричність (eccentricity) – найбільшу відстань із мінімальних відстаней від обумовленого вузла зв'язку до інших; посередництво (betwetnness) – значення кількості найкоротших шляхів, що проходять через обумовлений вузол зв'язку тощо.

За допомогою використання запропонованого у статті удосконаленого алгоритму Дейкстри можна отримати значення найкоротших шляхів від обумовленого вузла зв'язку до всіх інших вузлів зв'язку у системі військового зв'язку. У теорії складних мереж важливим є визначення середньої відстані від обумовленого вузла зв'язку до інших вузлів зв'язку. Позначимо обумовлений вузол зв'язку номером один, тоді номери решти вузлів зв'язку будуть мати значення *i=1…,I*. За такої умови середня відстань від обумовленого вузла зв'язку до інших вузлів зв'язку, відповідно до [18; 19], обчислюватиметься за наступною формулою (9):

$$\tilde{l}_1 = \frac{2}{I(I+1)} \sum_{i=1}^{I} d_{1I} , \tag{9}$$

де d_{1I} – найкоротші відстані між першим та іншими вузлами зв'язку у системі військового зв'язку;

I – кількість вузлів зв'язку в системі військового зв'язку.

Під час переходу від розгляду параметрів вузлів зв'язку до параметрів мережі зв'язку мовитимемо про середню відстань між всіма можливим парами вузлів зв'язку в мережі. Для цього необхідно просумувати середні відстані всіх вузлів зв'язку і розділити суму на їх кількість (10):

$$\tilde{l} = \frac{\sum_{i=1}^{I} \tilde{l}_i}{I} , \tag{10}$$

або, відповідно до [18, 19], скористатися таким виразом (11):

$$\tilde{l} = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i \geq j} d_{ij} , \tag{11}$$

де *n* – кількість вузлів зв'язку в системі військового зв'язку;

d_{ij} – найкоротша відстань між *i*-тим та *j*-тим вузлами зв'язку в системі військового зв'язку.

Висновки й перспективи подальших досліджень

У статті вдосконалено метод Дейкстри для пошуку найкоротших маршрутів між вузлами зв'язку в системі військового зв'язку завдяки його використанню замість матриці інцидентності вузлів зв'язку у стандартному алгоритмі матриці інцидентності вузлів і ліній зв'язку. Такий підхід більш за все відповідає потребам управління системою військового зв'язку. Він дозволяє найоптимальніше сформувати значення вагових коефіцієнтів ліній зв'язку завдяки визначенню уточнених експлуатаційних витрат для функціонування ліній зв'язку кожним окремим вузлом зв'язку. Визначення вагових коефіцієнтів ліній зв'язку можна реалізувати у вигляді окремої інформаційно-аналітичної задачі або удосконалити алгоритм Дейкстри шляхом введення до нього додаткових блоків. Використання матриці вторинної інцидентності вузлів зв'язку в алгоритмі Дейкстри також дозволить спростити обчислювальну складність алгоритму.

Математичне моделювання на основі спрощеної моделі системи військового зв'язку, що наведена на рисунку 2, підтвердило ефективність удосконаленого методу.

Такий підхід може бути поширений на інші випадки інтерпретації вагових коефіцієнтів в алгоритмі, окрім експлуатаційних витрат. Наприклад, це можуть бути характеристики, що мають ймовірнісний характер. Такі, як імовірність доставки інформаційних повідомлень, імовірність бітової помилки, імовірності стійкості ліній і вузлів зв'язку в умовах ведення сучасних інтенсивних бойових дій, та інші.

Література

1. Снарський А. О., Ланде Д. В. Моделювання складних мереж : навчальний посібник. Київ : НТУУ «КПІ», 2015. 212 с. **2. Harary F.** Graph theory. 3rd ed Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1972. 274 p. **3. Агеев Д. В.** Методика описания структуры современных телекоммуникационных систем с использованием многослойных графов. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий.* 2010. № 6. С. 56–59. URL: http://journals.uran.ua/eejet/article/view/3295/3096 (дата звернення: 03.03.2023). **4. Агєєв Д. В.** Моделирование современных телекоммуникационных систем многослойными графами *Проблеми телекомунікацій*. 2010. №1. С.23-34. URL: http://openarchive.nure.ua/handle/document/2722 (дата звернення: 03.03.2023). **5. Dijkstra E. W.** A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*. 1959. Vol.1. № 1. P. 269–271. URL: https://doi.org/10.1007/bf01386390 (date of access: 03.03.2023). **6. Cormen T., Leiserson Ch., Rivest R. and Stein C.** Introduction to algorithms, fourth edition. [S. l.] : MIT Press, 2022 – 1332 p. 1312 p. **7. Levitin A.** Introduction to the design & analysis of algorithms. 3rd ed. [S. l.]: Pearson 2011. 565 p. **8. Black P. E.** Greedy algorithm. Dictionary of Algorithms and Data Structures. 2005. URL: https://www.nist.gov/dads/HTML/greedyalgo.html (date of access: 03.03.2023). **9. Bellman R.** On a routing problem. Quarterly of applied mathematics. 1958. Vol. 16. № 1. P. 87–90. URL: https://doi.org/10.1090/qam/102435 (date of access: 03.03.2023). **10. Ford L. R., Fulkerson D. R.** Flows in networks (rand corporation research studies series) [S.l.] : Princeton Univ Pr, 1962. 198 p. **11. Слюсар В. І., Перепеліцин С. О.** Аналіз топології багаторангових мереж на основі торцевого добутку матриць. *Радіотехнічні поля, сигнали, апарати та системи* : зб. наук. пр. IX Міжнар. наук.-техн. конф. 16–22 листопада 2020. Київ : НТУУ КПІ. С. 114–116. DOI:10.13140/RG.2.2.26965.04329. **12. Слюсар В. И., Перепелицын С. А.** Применение торцевого произведения матриц в задачах анализа топологий маршрутизации многоранговых сетей. *Озброєння та військова техніка.* 2021. №1(29). С. 56–63. **13. Слюсар В. И.** Торцевые произведения матриц в радиолокационных приложениях. *Изв. ВУЗов. Радиоэлектроника.* 1998. Т.41. № 3. С. 71–75. **14. Slyusar V. I.** A family of face products of matrices and its properties. *Cybernetics and systems analysis*. 1999. Vol. 35. № 3. P. 379–384. URL: https://doi.org/10.1007/bf02733426 (date of access: 03.03. 2023). **15. Міночкін А. І., Рудаков В. І., Слюсар В. І.** Основи воєнно-технічних досліджень. теорія та приклади : монографія / ред. А. П. Ковтуненко. Київ : Гранмна, 2011. Т.2 «Синтез засобів інформаційного забезпечення озброєння і військової техніки». С. 7–98, 354–521. **16. Зінченко К. А.** Метод формалізації аналітичного опису системи військового зв'язку на основі тензорно-матричної теорії у поєднанні з теорією графів. *Труди університету* : збірник наукових праць Національного університету оборони України імені Івана Черняховського. 2022. №6(175). С. 232–248. **17. Військовий стандарт** «Словник НАТО зі зв'язку. Частина 1 (AComP 01 (Edition 3) NATO COMMUNICATIONS GLOSSARY (Chapter 716–722), MOD)». Вид. офіц. Київ : ВІТІ, 2019. 212 с. **18 Ланде Д. В., Снарський А. О., Безсуднов І. В.** Интернетика: навигация в сложных сетях: модели и алгоритмы. Ліброком, 2006. 264 с. **19. Головач Ю., Олемский О., Фербер К. фон та ін.** Складні мережі. *Журнал фізичних досліджень*. 2006. Т. 10. №4. С. 247-289.

AN IMPROVED DIJKSTRA METHOD FOR DETERMINING THE SHORTEST ROUTES BETWEEN COMMUNICATION NODES IN A MILITARY COMMUNICATION SYSTEM

***Vadim Slyusar** (Doctor of Technical Sciences, professor)*[1]
Kateryna Hromliuk[2]

[1]Central Scientific Research Institute of Armament and Military Equipment of the Armed Forces of Ukraine, Kiyv, Ukraine
[2] Military Institute of Telecommunications and Information Technologies, Kiyv, Ukraine

In the article the authors present improved Dijkstra's method for the military communication system by using the incidence matrix of nodes and communication lines instead of the incidence matrix of nodes. The improved method was adapted to the model of the military communication system, which is formalized by a block matrix of the incidence of nodes and communication lines with the division of matrix blocks by types and components of the military communication system. The improvement implies in the introduction of additional blocks to the standard Dijkstra algorithm for preliminary, more accurate calculation of the weighting factors of *communication lines. At the same time, the authors propose a number of new analytical expressions based on the use of the block matrix of secondary incidence, as well as the quadratic form of the incidence matrix. Mathematical modeling based on a simplified model of the military communication system confirmed the efficiency of the improved method. The improved method synthesized by the authors is more relevant to the real conditions of managing the military communication system and can be used for the needs of the system management process automation as a basis for the development of information and analytical tasks.*

Keywords: *Dijkstra's method, multilayer graph, block matrix, block edge product of matrices, incidence matrix.*

References

1. Snarsky, A. O.. Lande D. V. (2015) Modeling complex networks: a textbook. Kyiv: NTUU «KPI», 212. **2. Harary, F.** (1972) Graph theory. 3rd ed Reading, Massachusetts: Addison-Wesley. 274. **3. Ageev, D. V**. (2011) Methodology for describing the structure of modern telecommunication systems using multilayer graphs. Vostochno-Evropeyskyi zhurnal peredovih technologiy, 6/4(48), 56–59. URL: http://journals. uran.ua/eejet/article/view/3295/3096 (access date: 03.03.2023). **4. Ageev, D. V.** (2010) Modeling of modern telecommunications systems with multi-layer graphs Problemy telekomunikatsii, 1, 23–34. URL: http://openarchive.nure.ua/handle/document/2722 (date of application: 03.03.2023). **5. Dijkstra, E. W.** (1959) A note on two problems in connexion with graphs. Numerische Mathematik, 1, 1, 269–271. URL: https://doi.org/10.1007/bf01386390 (date of access: 03.03.2023). **6. Cormen, T., Leiserson, Ch., Rivest, R. and Stein, C. (**2022) Introduction to algorithms, fourth edition. [S. l.]:MIT Press,. 1312. **7. Levitin, A.** (2011) Introduction to the design & analysis of algorithms. 3rd ed. [S. l.]: Pearson, 565. **8. Black, P. E.** (2005) Greedy algorithm Dictionary of Algorithms and Data Structures. URL: https://www.nist.gov/dads/HTML/greedyalgo.html (date of access: 03.03.2023). **9. Bellman, R.** (1958) On a routing problem. Quarterly of applied mathematics, 16, 1, 87–90 URL: https://doi.org/10.1090/qam/102435 (date of access: 03.03.2023). **10. Fulkerson, D. R., Ford, L. R.** (1962) Flows in networks (rand corporation research studies series) [S.l.] : Princeton Univ Pr, 198. **11. Slyusar V. I., Perepelitsyn S. O.** (2020) Analysis of the topology of multi-rank networks based on the end product of matrices. Radio Technical Fields, Signals, Devices and Systems : IX International Scientific and Technical Conference. November 16–22, Kyiv : NTUU KPI, 114–116. DOI: 10.13140/RG.2.2.26965.04329. **12. Slyusar, V. I., Perepelitsyn, S. A.** (2021) Application of the end product of matrices in problems of analysis of routing topologies of multi-rank networks, 56–63 p. **13. Slyusar, V. I.** (1998) End products of matrices in radar applications. Izv. universities. Radioelectronics, 41, 3, 71–75. **14. Slyusar, V. I.** (1999) A family of face products of matrices and its properties. Cybernetics and systems analysis, 35, 3, 379–384. URL: https://doi.org/10.1007/bf02733426 (date of access:03.03. 2023). **15. Minochkin, A. I., Rudakov, V. I., Slyusar, V. I.** (2011) Fundamentals of military-technical research. theory and examples: Monograph / ed. A. P. Kovtunenko. Kyiv: Granmna, 2 «Synthesis of means of information support of weapons and military equipment», 7–98, 354–521. **16. Zinchenko, K. A.** (2022) The method of formalization of the analytical description of the military communication system based on the tensor-matrix theory in combination with the graph theory. University Works: Collection of scientific works of the National Defense University of Ukraine named after Ivan Chernyakhovsky, 6 (175), 232-248. **17. Military standard** «NATO communication dictionary. Part 1 (AComP 01 (Edition 3) NATO COMMUNICATIONS GLOSSARY (Chapter 716–722), MOD)». Official. (2019) Kyiv: VITI, 212. **18. Lande, D. V., Snarskyi, A. O., Bezsudnov, I. V.** (2006) Internet: navigation in complex networks: models and algorithms, Librokom, 264. **19. Golovach, Yu**., **Olemskyi, O., Ferber, K. fon et al.** (2006) Complex networks. Journal of physical research, 10, 4, 247–289.