DOI:**10.33099/2311-7249/2022-44-2-5-9**

УДК 519.622

Михайло Юрійович Ракушев ***(доктор технічних наук, старший науковий співробітник)***
Микола Васильович Філатов ***(кандидат технічних наук, доцент)***

Національний університет оборони України імені Івана Черняховського, Київ, Україна

РОЗРАХУНОК ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ТЕЙЛОРІВСЬКОГО СПЕКТРУ ОБЕРНЕНОЇ МАТРИЦІ ТА ДЕТЕРМІНАНТА ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

У статті отримано залежності для визначення диференціально-тейлорівського спектру оберненої матриці та детермінанта - визначника матриці. А саме, для випадку якщо відомий диференціально-тейлорівський спектр вихідної матриці та матриця не є виродженою, що забезпечує існування оберненої матриці, розраховується диференціально-тейлорівський спектр оберненої матриці. При розрахунку диференціально-тейлорівського спектру оберненої матриці, використовується підхід, який подібний до методів лінійної алгебри для розрахунку оберненої матриці – метод квадратного кореня, або метод виключення. З використанням запропонованого підходу, рекурентна залежність для шуканого диференціально-тейлорівського спектру оберненої матриці потребує проведення тільки однієї процедури з обернення матриці, тобто безпосередньо операція отримання оберненої матриці проводиться тільки один раз. Зазначений підхід, дозволяє отримати функціональну залежність, яка є подібною до залежності з визначення диференціально-тейлорівського спектру частки від ділення двох функцій. При визначенні диференціально-тейлорівського спектру детермінанта, використовується залежність для отримання похідних від детермінанта. Використання описаного підходу, дає змогу отримати залежність, яка має зручну форму для програмної реалізації на ЕОМ. Запропоновані співвідношення є суттєвими при розробці та дослідженні матричних математичних моделей розроблених на основі математичного апарату диференціально-тейлорівських перетворень. Отримані залежності є подальшим розвитком теоретичних основ вітчизняного математичного апарату диференціально-тейлорівських перетворень академіка Пухова Г.Є.

Ключові слова: *диференціально-тейлорівські перетворення; диференціально-тейлорівський спектр; обернена матриця; детермінант; моделювання.*

Вступ

Постановка проблеми. Комп'ютерне моделювання стало одним з головних засобів дослідження складних процесів та систем, на якому базуються сучасні підходи до проектування, оптимізації та управління в різних областях науки і техніки, у тому числі і у військовій справі. У всьому різноманітті класів математичних моделей, що використовуються при моделюванні, через розповсюдженість, окремо виділяють матричні моделі, які у багатьох практичних задачах, дозволяють описувати багатопараметричні об'єкти (процеси) у зручній та компактній формі [1-3].

Одним з методів математичного моделювання є диференціально-тейлорівські перетворення (ДТ-перетворення), основною властивістю цього математичного апарату є можливість рекурентного визначення коефіцієнтів ряду Тейлора (Т-спектру) задачі, що вирішується [4-6]. Однак, у відомій літературі, відсутні залежності з отримання Т-спектру оберненої матриці та визначника матриці, які є одними з базових операцій над матрицями.

У зв'язку із зазначеним, удосконалення ДТ-перетворень щодо застосування його до матричних моделей є актуальним завданням.

Аналіз останніх досліджень і публікацій.

Класичними працями з ДТ-перетворень, у яких розроблено основи цього математичного апарату є праці його розробника – академіка НАН України Пухова Г. Є. [4, 5]. Як і інші функціональні перетворення, ДТ-перетворення є сукупністю двох операцій: прямого ДТ-перетворення - переходу з області оригіналів у область Т-спектрів (зображень), та оберненого ДТ-перетворення – переходу з області Т-спектрів (зображень) в область оригіналів. У [4, 5] наведено основні формули щодо проведення прямого ДТ-перетворення, які є рекурентними залежностями, що дозволяє ефективно їх використовувати при числовому комп'ютерному моделюванні на ЕОМ.

Виходячи з того, що Т-спектр, є набором коефіцієнтів ряду Тейлора, описане вище пряме та обернене ДТ-перетворення має скалярну (не матричну) форму. Зазначене, потребує при застосуванні ДТ-перетворень до матричних математичних моделей, розписувати матричні операції – за-елементами. Це, зменшує зручність розробки матричних моделей на основі ДТ-перетворень, так як, вихідну "компактну" матричну форму подання вихідної моделі потрібно розкласти за-елементами.

З іншого боку, для матричних математичних моделей, використовуються "спеціалізовані" математичні операції, насамперед, знаходження оберненої матриці ("аналог" операції ділення для скалярних аргументів), та тісно пов'язане з цією операцією - знаходження детермінанту (визначника) матриці.

На сучасному етапі, ДТ-перетворення активно використовуються для моделювання, зазначене супроводжується сталим удосконаленням їх теоретичних основ [7], однак спеціалізовані залежності для розрахунку Т-спектру оберненої матриці та детермінанту матриці, у відомих джерелах – відсутні.

Мета статті. Таким чином, метою статті є отримання залежностей (формул) для визначення Т-спектру оберненої матриці та детермінанту матриці.

Виклад основного матеріалу дослідження

ДТ-перетвореннями називають функціональні перетворення вигляду [4-7]:

$$Z(k) \overset{DTP}{\Longleftrightarrow} z(t),$$

$$Z(k) = \frac{h^k}{k!}\frac{d^k z(t)}{dt^k}\bigg|_{t=t_*} = \frac{h^k}{k!}\frac{d^k z(t_*)}{dt^k} \qquad (1)$$

$$z(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(t-t_*)^k}{h^k}Z(k)\right), \qquad (2)$$

де $\overset{DTP}{\Longleftrightarrow}$ - знак відповідності між оригіналом та ДТ-зображенням;

$z(t)$ – скалярна функція яка диференційована необхідну кількість разів (має похідні необхідного порядку) за t;

t – скалярний аргумент, за яким проводиться перетворення;

t_* – значення аргументу, при якому проводиться перетворення;

h – відрізок аргументу t, на якому функція $z(t)$ подається рядом Тейлора;

k – цілочисловий аргумент $k = 0, 1,\ldots;$

$Z(k)$ – дискретна функція за аргументом k.

Вираз (1) визначає пряме перетворення, яке дозволяє за оригіналом $z(t)$ знайти зображення $Z(k)$. Обернене перетворення, яке відновлює оригінал $z(t)$ у вигляді відрізка ряду Тейлора, визначається виразом (2). ДТ-зображення $Z(k)$ прийнято називати Т-спектром, а значення функції $Z(k)$ при конкретних значеннях аргументу k – Т-дискретами.

Нехай, дано квадратну невироджену матрицю та її Т-спектр у вигляді:

$$A(t) \overset{DTP}{\Longleftrightarrow} A(k), \qquad (4)$$

де $A(t) = (a_{j_1 j_2}(t))_{n\times n}$ – квадратна матриця (яка має обернену матрицю) з елементами $a_{j_1 j_2}(t)$ при $j_1 = \overline{1,n}$ (j_1 – індекс рядка), $j_2 = \overline{1,n}$ (j_2 – індекс стовпця) розміром $n\times n$;

$A(k) = (a_{j_1 j_2}(k))_{n\times n}$: $\{k = \overline{0,\infty}\}$ – Т-спектр матриці $A(t)$ з елементами $a_{j_1 j_2}(k)$, при $j_1 = \overline{1,n}$ (j_1 – індекс рядка), $j_2 = \overline{1,n}$ (j_2 – індекс стовпця) розміром $n\times n$.

Необхідно знайти Т-спектр оберненої матриці

$$A^{-1}(t) \overset{DTP}{\Longleftrightarrow} A^{\underline{-1}}(k), \qquad (5)$$

де $A^{-1}(t)$ – обернена матриця;

$A^{\underline{-1}}(k)$ – шуканий Т-спектр (ДТ-зображення) оберненої матриці.

Розглянемо алгоритм розрахунку оберненої матриці - метод квадратного кореня, метод виключення [8]:

$$A^{-1}(t)A(t) = E_{n\times n}, \qquad (5)$$

де $E_{n\times n}$ – одинична матриця.

Виходячи з властивостей ДТ-перетворень, проведемо для (5) пряме ДТ-перетворення (1):

$$A^{\underline{-1}}(k) * A(k) = E_{n\times n}\delta_T(k), \qquad (5)$$

$$\text{при } \delta_T(k-a) = \begin{cases} 1, & \{k = a\}, \\ 0, & \{k \neq a\}, \end{cases} \qquad (5)$$

де $*$ – операція алгебраїчної згортки, що є ДТ-зображенням операції множення;

$\delta_T(k)$ - тейлорівська одиниця, "теда".

З врахуванням порядку проведення операції $*$ залежність (5) для "традиційної" операції матричного множення має вигляд:

$$\sum_{p=0}^{k}\left(A^{\underline{-1}}(k-p)A(p)\right) = E_{n\times n}\delta_T(k). \qquad (6)$$

Приведемо (6) до вигляду, що формою подання подібної до операції отримання Т-спектру від ділення двох функцій:

$$A^{\underline{-1}}(k)A(0) + \sum_{p=1}^{k}\left(A^{\underline{-1}}(k-p)A(p)\right) = E_{n\times n}\delta_T(k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{\underline{-1}}(k)A(0) = E_{n\times n}\delta_T(k) - \sum_{p=1}^{k}\left(A^{\underline{-1}}(k-p)A(p)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{\underline{-1}}(k) =$$

$$= \left(E_{n\times n}\delta_T(k) - \sum_{p=1}^{k}\left(A^{\underline{-1}}(k-p)A(p)\right)\right)A^{-1}(0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1}(k) = \\ = \begin{cases} A^{-1}(0), & \{k=0\}, \\ -\left(\sum_{p=1}^{k}\left(A^{-1}(k-p)A(p)\right)\right)A^{-1}(0), & \{k\ge 1\} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1}(k) = \\ = \begin{cases} A^{-1}(0), & \{k=0\}, \\ -\left(\sum_{p=1}^{k}\left(A^{-1}(k-p)A(p)\right)\right)A^{-1}(0), & \{k\ge 1\}. \end{cases} \quad (8)$$

Наприклад, при $k=0$ Т-спектр оберненої матриці $A^{-1}(k=0)$ є оберненою матрицею нульової Т-дискрети $A^{-1}(k=0)$, тобто $A^{-1}(0)=A^{-1}(0)$. У цілому визначення Т-спектра оберненої матриці потребує лише однократного "традиційного" розрахунку оберненої матриці $A^{-1}(k=0)$.

Завдання розрахунку визначника матриці (4), сформулюємо у вигляді:

$$\det(A(t)) \overset{DTP}{\Longleftrightarrow} \underline{\det} A(k), \quad (7)$$

де $\det(A(t))$ – визначник (детермінант) матриці;

$\underline{\det} A(k)$ – шуканий Т-спектр детермінанта.

Для розрахунку Т-спектру визначника матриці використаємо метод розкладу за елементами рядка (стовпця) за алгебраїчними доповненнями, метод опорного елемента [1].

Для реалізації (7) розглянемо порядок диференціювання визначника – похідна від визначника дорівнює сумі визначників, що отримуються із вихідного визначника послідовною заміною у ньому елементів j_1-го рядка похідними цих елементів:

$$\frac{d}{dt}det(A(t)) = det\begin{pmatrix} \frac{da_{11}(t)}{dt} \cdots \frac{da_{1n}(t)}{dt} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{n1}(t) \cdots a_{nn}(t) \end{pmatrix} + \\ + \ldots + det\begin{pmatrix} a_{11}(t) \cdots a_{1n}(t) \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \frac{da_{n1}(t)}{dt} \cdots \frac{da_{nn}(t)}{dt} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\det(A(t)) = \sum_{1=\sum_{j=1}^{n}k_j} \det\begin{pmatrix} \frac{d^{k_1}a_{11}(t)}{dt^{k_1}} \cdots \frac{d^{k_1}a_{1n}(t)}{dt} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \frac{d^{k_n}a_{n1}(t)}{dt^{k_n}} \cdots \frac{d^{k_n}a_{nn}(t)}{dt^{k_n}} \end{pmatrix} =$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\det(A(t)) = \sum_{1=\sum_{j_1=1}^{n}k_{j_1}} \det\left(\frac{d^{k_{j_1}}a_{j_1j_2}(t)}{dt^{k_{j_1}}}\right)_{n\times n}, \quad (8)$$

де сума визначається за всіма можливими комбінаціями, які відповідають умові $1=\sum_{j_1=1}^{n}k_{j_1}$ щодо заміни рядка на його похідні.

Узагальнення (8) для похідних вищого порядку із застосуванням прямого ДТ-перетворення дасть Т-спектр визначника у вигляді

$$\underline{\det} A(k) = \sum_{k=\sum_{j_1=1}^{n}k_{j_1}} \det\left(a_{j_1j_2}(k_{j_1})\right)_{n\times n}, \quad (9)$$

де сума визначається за усіма можливими комбінаціями, які відповідають умові $k=\sum_{j_1=1}^{n}k_{j_1}$ щодо підстановки рядків Т-спектра матриці $A(k)$.

У (8), (9) проведено розклад за рядками. За необхідності можна проводити розклад за стовпцями.

З (9) можна побачити, що при $k=0$ Т-спектр детермінанту $\underline{\det} A(k=0)$ є детермінантом нульової Т-дискрети $\det A(k=0)$, тобто $\underline{\det} A(0)=\det A(0)$.

При Алгоритм реалізації (9) наведено на рис. 1, де det(…) - будь який алгоритм (у тому числі числовий) розрахунку визначника матриці (детермінанта).

Після отримання формул для розрахунку Т-спектру оберненої матриці (8) та детермінанту матриці (9), проведемо моделювання на прикладі. Так, розглянемо матрицю

$$A(t) = \begin{pmatrix} 4\exp(-2t) & 1+t^2 \\ t+t^3 & -2\exp(t) \end{pmatrix},$$

з врахуванням властивостей ДТ-перетворень, її Т-спектр має вигляд:

$$A(t) \overset{DTP}{\Longleftrightarrow} A(k),$$

$$A(k) = \begin{pmatrix} (-1)^k \frac{4}{2^k}\frac{h^k}{k!} & \delta_T(k)+h^2\delta_T(k-2) \\ h\delta_T(k-1)+h^3\delta_T(k-3) & -2\frac{h^k}{k!} \end{pmatrix},$$

Окремі Т-дискрети при $k=0\ldots4$ дорівнюють:

$$A(0) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A(1) = \begin{pmatrix} -8h & 0 \\ h & -2h \end{pmatrix},$$

$$A(2) = \begin{pmatrix} 8h^2 & h^2 \\ 0 & -h^2 \end{pmatrix},$$

$$A(3) = \begin{pmatrix} -5{,}333333h^3 & 0 \\ h^3 & -0{,}333333h^3 \end{pmatrix},$$

$$A(4) = \begin{pmatrix} 2{,}666666\,h^4 & 0 \\ 0 & -0{,}083333\,h^4 \end{pmatrix}.$$

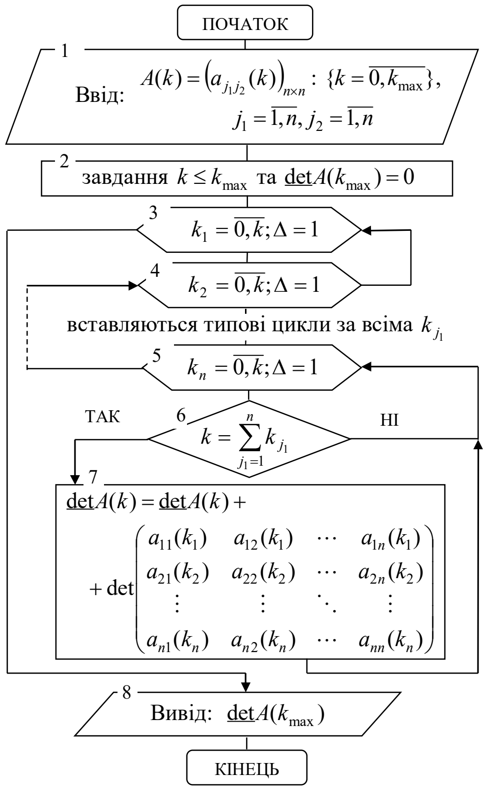

Рис. 1. Алгоритм розрахунку Т-спектра визначника.Із застосуванням (8) отримаємо Т-дискрети оберненої матриці

$$A^{-1}(0)=\begin{pmatrix}0{,}25 & 0{,}125\\ 0 & -0{,}5\end{pmatrix},$$

$$A^{-1}(1)=\begin{pmatrix}0{,}46875h & 0{,}109375h\\ 0{,}125h & 0{,}5625h\end{pmatrix},$$

$$A^{-1}(1)=\begin{pmatrix}0{,}46875h & 0{,}109375h\\ 0{,}125h & 0{,}5625h\end{pmatrix},$$

$$A^{-1}(2)=\begin{pmatrix}0{,}410156h^2 & 0{,}158203h^2\\ 0{,}109375h^2 & -0{,}257812h^2\end{pmatrix},$$

$$A^{-1}(3)=\begin{pmatrix}0{,}145345\,h^3 & 0{,}073324\,h^3\\ 0{,}158203\,h^3 & 0{,}201497\,h^3\end{pmatrix},$$

$$A^{-1}(4)=\begin{pmatrix}-0{,}116964\,h^4 & -0{,}116964\,h^4\\ -0{,}073324\,h^4 & -0{,}054159\,h^4\end{pmatrix}$$

Застосуємо до вихідної матриці залежність (9) та отримаємо дискрети ДТ-спектру детермінанту у вигляді:

$$\underline{\det}A(0)=-8\,,\qquad \underline{\det}A(1)=7\,h\,,$$

$$\underline{\det}A(2)=-4\,h^2\,,\qquad \underline{\det}A(3)=0{,}6666\ h^3\,,$$

$$\underline{\det}A(4)=0{,}3333\ h^4\,.$$

Для перевірки правильності отриманого Т-спектру достатньо розглянути залежності:

$$\det A(t)=-8\exp(-t)-t-2t^3-t^5\,,$$

$$\det A(t)\overset{DTP}{\Longleftrightarrow}\underline{\det}A(k)\,,$$

$$\underline{\det}A(k)=-8(-1)^k\,\frac{h^k}{k!}\,\delta_T(k)-$$
$$-\delta_T(k-1)-2\delta_T(k-3)-\delta_T(k-5).$$

З результатів моделювання видно, що отримані формули дозволяють розраховувати Т-спектри оберненої матриці та детермінанту.

Висновки й перспективи подальших досліджень

Таким чином, у статті отримано нові залежності для визначення диференціально-тейлорівського спектру оберненої матриці та детермінанта - визначника матриці. Зазначене є удосконаленням теоретичних основ математичного апарату диференціально-тейлорівських перетворень.

Перспективами подальших досліджень може бути застосування отриманих залежностей для моделювання динамічних систем методом диференціально-тейлорівських перетворень.

Література

1. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. Изд. 2-е стереотип. – К: Техніка. 1977. – 768 с. **2. Mashkov O., Sobchuk V., Barabash O., Dakhno N., Shevchenko H., Maisak T.** Improvement of variational-gradient method in dynamical systems of automated control for integro-differential models / O. Mashkov, V. Sobchuk, O. Barabash, N. Dakhno, H. Shevchenko, T. Maisak // Mathematical Modeling and Computing. - Lviv Polytechnic National University. - Vol. 6, No. 2, 2019. Pages 344-357. DOI**:** 10.23939/mmc2019.02.344. **3. Y. Kravchenko, O. Leshchenko, N. Dakhno, O. Trush, O. Makhovych.** Evaluating the Effectiveness of Cloud Services / Kravchenko Y., Leshchenko O., Dakhno N., Trush O., Makhovych O.//. 2019 IEEE International Conference on Advanced Trends in Information Theory (ATIT). DOI: 10.1109/atit49449.2019.9030430. **4. Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов / Г.Е. Пухов // К.: Наукова думка, 1986. – 159 с. **5. Пухов Г.Е.** Дифференциальные спектры и модели / Г.Е. Пухов // К.: Наукова думка, 1990. – 184 с. **6. Laptiev O., Vitalii S., Yevseiev S., Haidur H., Gakhov S., Hohoniants S.** The new method for detecting signals of means of covert obtaining information / O. Laptiev, S.Vitalii, S. Yevseiev, H. Haidur, S. Gakhov, S. Hohoniants // 2020 IEEE 2nd International Conference on Advanced Trends in Information Theory (ATIT). DOI: 10.1109/atit50783.2020.9349322. **7. Ракушев М.Ю. Філатов М.В.** Визначення диференціально-тейлорівського спектру складної функції для випадку суперпозиції при аналізі точності динамічних систем / М. Ю. Ракушев, М.В. Філатов // Науковий журнал “Сучасні інформаційні технології у сфері безпеки та оборони”, стаття. – К.: НУОУ, 2021. – № 3 (42). С. 25-30. **8. Самарский А.А., Гулин А.В.** Численные методы: Учеб. пособие для вузов.– М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 432 с.

CALCULATION OF THE DIFFERENTIAL-TAYLOR SPECTRUM OF THE INVERSE MATRIX AND THE DETERMINANT IN MODELING DYNAMIC SYSTEMS

Mikhailo Rakushev ***(Doctor of Technical Sciences, Senior Researcher)***
Nikolai Filatov ***(Candidate of Technical Sciences, Associate Professor)***

National Defence University of Ukraine named after Ivan Cherniakhovskyi, Kyiv, Ukraine

In the article, dependencies are obtained for determining the differential-Taylor spectrum of the inverse matrix and the determinant of the matrix. Namely, for the case if the known differential-Taylor spectrum of the original matrix and the matrix is not degenerate, which ensures the existence of the inverse matrix, the differential-Taylor spectrum of the inverse matrix is calculated. When calculating the differential-Taylor spectrum of the inverse matrix, an approach similar to the linear algebra methods for calculating the inverse matrix is used - the square root method, or the elimination method. Using the proposed approach, the recurrent dependence for the desired differential-Taylor spectrum of the inverse matrix requires only one matrix inversion procedure, i.e. the direct operation of obtaining the inverse matrix is carried out only once. This approach makes it possible to obtain a functional dependence, which is similar to the dependence by definition of the differential-Taylor spectrum of the quotient of the division of two functions. When determining the differential-Taylor spectrum of the determinant, the dependence is used to obtain derivatives from the determinant. Using the described approach makes it possible to obtain a dependence that has a convenient form for software implementation on a computer. The proposed relationships are essential in the development and study of matrix mathematical models developed on the basis of the mathematical apparatus of differential-Taylor transformations. The obtained dependences are the development of the theoretical foundations of the domestic mathematical apparatus of differential-Taylor transformations of academician Pukhov G.E.

Keywords: *differential-Taylor transformations; differential Taylor spectrum; inverse matrix; determinant; modeling.*

References

1. Sigorskiy V.P. Matematicheskiy apparat inzhenera. Izd. 2-e stereotip. – K: TehnIka. 1977. – 768 s. **2. Mashkov O., Sobchuk V., Barabash O., Dakhno N., Shevchenko H., Maisak T.** Improvement of variational-gradient method in dynamical systems of automated control for integro-differential models / O. Mashkov, V. Sobchuk, O. Barabash, N. Dakhno, H. Shevchenko, T. Maisak // Mathematical Modeling and Computing. - Lviv Polytechnic National University. - Vol. 6, No. 2, 2019. Pages 344-357. DOI: 10.23939/mmc2019.02.344. **3. Y. Kravchenko, O. Leshchenko, N. Dakhno, O. Trush, O. Makhovych.** Evaluating the Effectiveness of Cloud Services / Kravchenko Y., Leshchenko O., Dakhno N., Trush O., Makhovych O.//. 2019 IEEE International Conference on Advanced Trends in Information Theory (ATIT). DOI: 10.1109/atit49449.2019.9030430. **4. Puhov G.E.** Differentsialnyie preobrazovaniya i matematicheskoe modelirovanie fizicheskih protsessov / G.E. Puhov // K.: Naukova dumka, 1986. – 159 s. 5**. Puhov G.E.** Differentsialnyie spektryi i modeli / G.E. Puhov // K.: Naukova dumka, 1990. – 184 s. **6. Laptiev O., Vitalii S., Yevseiev S., Haidur H., Gakhov S., Hohoniants S.** The new method for detecting signals of means of covert obtaining information / O. Laptiev, S.Vitalii, S. Yevseiev, H. Haidur, S. Gakhov, S. Hohoniants // 2020 IEEE 2nd International Conference on Advanced Trends in Information Theory (ATIT). DOI: 10.1109/atit50783.2020.9349322. **7. Rakushev M.Iu. Filatov M.V.** Vyznachennia dyferentsialno-teilorivskoho spektru skladnoi funktsii dlia vypadku superpozytsii pry analizi tochnosti dynamichnykh system / M. Yu. Rakushev, M.V. Filatov // Naukovyi zhurnal "Suchasni informatsiini tekhnolohii u sferi bezpeky ta oborony", stattia. – K.: NUOU, 2021. – № 3 (42). S. 25-30. **8. Samarskiy A.A., Gulin A.V.** Chislennyie metodyi: Ucheb. posobie dlya vuzov.– M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1989. – 432 s.