DOI:**10.33099/2311-7249/2021-42-3-25-30**

УДК 519.622

Михайло Юрійович Ракушев *(доктор технічних наук, с.н.с.)*
Микола Васильович Філатов *(кандидат технічних наук, доцент)*

Національний університет оборони України імені Івана Черняховського, Київ, Україна

ВИЗНАЧЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ТЕЙЛОРІВСЬКОГО СПЕКТРУ СКЛАДНОЇ ФУНКЦІЇ ДЛЯ ВИПАДКУ СУПЕРПОЗИЦІЇ ПРИ АНАЛІЗІ ТОЧНОСТІ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

У статті отримано залежності для визначення диференціально-тейлорівського спектру складної функції, яка задана у вигляді суперпозиції функцій. А саме, для випадку коли вихідна функція задається рядом Тейлора за степенями деякої змінної – першого аргументу, а кінцева функція задається рядом Тейлора за степенями вихідної функції. Далі вирішується завдання щодо визначення диференціально-тейлорівського спектру – коефіцієнтів ряду Тейлора кінцевої функції за степенями першого аргументу. У класичній літературі з диференціально-тейлорівських перетворень, зазначений диференціально-тейлорівський спектр (окремі члени ряду Тейлора), подається у вигляді нескінченної суми за степенями першого аргументу. Натомість, у статті отримані залежності, які диференціально-тейлорівський спектр суперпозиції функцій визначають як кінцеву суму за степенями першого аргументу. При цьому, наведено залежності у двох різних формах, що дозволяє обирати більш зручну для конкретного практичного використання форму. Особливістю отриманих формул є використання скороченої алгебраїчної згортки при розрахунку диференціально-тейлорівського спектру степеневої функції для першого аргументу – у згортці не враховується нульова дискрета диференціально-тейлорівського спектру вихідної функції за першим аргументом. Отримані співвідношення є суттєвими для завдань аналізу залежності точності подання кінцевої функції від заданої кількості врахованих дискрет диференціально-тейлорівського спектру вихідної функції, а також вирішення завдання оцінки залежності точності рішення задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь методом диференціально-тейлорівських перетворень при зміні кількості врахованих дискрет диференціально-тейлорівського спектру, що приймають участь у розрахунках. Отримані залежності є подальшим розвитком теоретичних основ вітчизняного математичного апарату диференціально-тейлорівських перетворень Пухова.

Ключові слова: *диференціально-тейлорівські перетворення; диференційльно-тейлорівський спектр; суперпозиція функцій.*

Вступ

Постановка проблеми. На сучасному етапі використання обчислювальної техніки для розв’язку практичних завдань, одним з напрямів, що швидко розвивається є числове моделювання. Зазначене обумовлене, у тому числі тим, що використання числових моделей дозволяє значно зменшити вартість процесу наукового та технологічного пошуку.

Одним з перспективних методів числового моделювання є диференціально-тейлорівські перетворення (ДТ-перетворення). Метод ДТ-перетворень – це математичний метод прикладного аналізу який дозволяє розв’язувати інтегро-диференціальні задачі в числовому, аналітичному та числово-аналітичному вигляді. Однією з основних властивостей ДТ-перетворень є можливість рекурентного визначення коефіцієнтів диференціально-тейлорівського спектру (Т-спектру, який є коефіцієнтами ряду Тейлора) задачі, що вирішується. При цьому, такий розрахунок методично просто реалізується у вигляді відповідної процедури на ЕОМ, що позбавляє від методичної складності проведення аналітичних операцій (взяття відповідних похідних в явному вигляді), замінюючи її на обчислювальну складність рекурентних залежностей. Зазначена характеристика методу ДТ-перетворень у значний мірі впливає на можливість їх застосування для розв’язку інтегро-диференціальних задач [1-4].

В зв’язку із зазначеним, удосконалення теоретичних основ математичного апарату ДТ-перетворень, якщо це впливає на ефективність його застосування при розв’язку практичних завдань є актуальним завданням.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Переважна більшість публікацій, що стосується ДТ-перетворень спрямована у практичну площину та стосується застосування цього математичного апарату до розв’язку прикладних задач. При цьому, класичною (базовою) працею для таких публікацій виступає праця, розробника ДТ-перетворень – академіка НАН України Пухова Г. Є. [1]. Окремо слід зазначити, що останнім часом, особливо в іноземних публікаціях, при посиланнях на ДТ-перетворення часто використовують праці Джоу Дж. К. [4]. Зазначене, напевно, пояснюється недостатньою кількістю сучасних вітчизняних публікації, насамперед, англійською. Але, для вітчизняних науковців, першість Пухова Г. Є. не викликає сумнівів.

Одним із значних теоретичних напрацювань щодо ДТ-перетворень є порядок визначення Т-спектрів складних функцій – тригонометричних, ступеневих тощо. При цьому, окремим випадком зазначеного визначення є розрахунок Т-спектру складної функції, що задана у вигляді суперпозиції функцій. Однак, зазначений Т-спектр у класичній праці Пухова Г.Є. [1] має вигляд нескінченної суми за степенями аргументу, що при його практичному використанні не є зручним. Отримання, залежностей для Т-спектру складної функції, що задана у вигляді суперпозиції функцій у вигляді скінченного ряду є значно більш зручним для практичного використання.

Мета статті. Таким чином, метою статті є отримання залежностей (формул) для визначення Т-спектру складної функції, що задана у вигляді суперпозиції функцій, у формі подання Т-спектру як кінцевої (скінченної) суми за степенями аргументу.

Виклад основного матеріалу дослідження

ДТ-перетворень для розв'язання задач, як і для інших операційних числень, полягає у переході від складної моделі (у вигляді системи інтегро-диференціальних рівнянь) у просторі оригіналів до більш простої еквівалентної моделі (системи алгебраїчних рекурентних рівнянь) у просторі зображень, проведення потрібних операцій (визначених задачею, що розв'язується) із отриманою моделлю в просторі зображень та відновлення отриманої кінцевої моделі у простір оригіналів.

ДТ-перетворення можуть бути різної вимірності: одновимірні, двовимірні і т.д. Вимірність перетворень, що використовуються, залежить від конкретики розв'язуваної задачі та визначається кількістю незалежних змінних, які одночасно розглядаються.

Одновимірними ДТ-перетвореннями називають функціональні перетвореннями вигляду [1-5, 7-8]:

$$Z(k)=\frac{h^k}{k!}\frac{d^k z(t)}{dt^k}\bigg|_{t=t_*}=\frac{h^k}{k!}\frac{d^k z(t_*)}{dt^k}, \qquad (1)$$

$$z(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(t-t_*)^k}{h^k}Z(k)\right), \qquad (2)$$

де $z(t)$ – скалярна функція яка диференційована необхідну кількість разів (має похідні необхідного порядку) за t;

t – скалярний аргумент, за яким проводиться перетворення;

t_* – значення аргументу, при якому проводиться перетворення;

h – відрізок аргументу t, на якому функція $z(t)$ подається рядом Тейлора;

k – цілочисловий аргумент $k=0, 1,\ldots$;

$Z(k)$ – дискретна функція за аргументом k.

Вираз (1) визначає пряме перетворення, яке дозволяє за оригіналом $z(t)$ знайти зображення $Z(k)$. Обернене перетворення, яке відновлює оригінал $z(t)$ у вигляді відрізка ряду Тейлора, визначається виразом (2). ДТ-зображення $Z(k)$ прийнято називати Т-спектром, а значення функції $Z(k)$ при конкретних значеннях аргументу k – Т-дискретами.

Задача визначення Т-спектру, для складної функції, яка задана у вигляді суперпозиції функцій має формулювання:

нехай $x=x(t)$ та $f=f(x)$ - функції, з яких перша може бути подана рядом Тейлора за степенями t, а друга – за степенями x. Потрібно, знаючи Т-зображення $X(k)$ функції $x(k)$, визначити Т-зображення $F(k)$ функції $f(x)$.

У [1], зазначений Т-спектр має вигляд:

$$F(k)=\begin{cases} f\big(X(0)\big), & \{k=0\},\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\dfrac{X^{\underline{n}}(k)}{n!}\left(\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}\right)_{x=X(0)}\right], & \{k\ge 1\}, \end{cases} \qquad (3)$$

де $\underline{n}$ – для області Т-зображень позначає n-ту степінь функції (визначається через операцію алгебраїчної згортки)

$$X^{\underline{n}}(k)=\left[X(k)-X(0)\delta_T(k)\right]^{\underline{n}}, \qquad (4)$$

$$\text{при } \delta_T(k-a)=\begin{cases}1, & \{k=a\},\\ 0, & \{k\ne a\},\end{cases} \qquad (5)$$

де $\delta_T(k-a)$ - тейлорівська одиниця, "теда".

Основною незручністю використання (3) на практиці, є необхідність взяття нескінченної суми.

Для отримання іншої формульної залежності для Т-спектру $F(k)$, як і в [1] розглянемо подання

$$f(x)=f(x_*)+(x-x_*)\frac{\partial f(x_*)}{\partial x}+\frac{(x-x_*)^2}{2!}\frac{\partial^2 f(x_*)}{\partial x^2}+\ldots\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(x-x_*)^n}{n!}\frac{\partial^n f(x_*)}{\partial x^n}\right]=$$

$$=f(x_*)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(x-x_*)^n}{n!}\frac{\partial^n f(x_*)}{\partial x^n}\right]. \qquad (6)$$

Відповідно до вихідних умов функція $x=x(t)$ має ряд Тейлора:

$$x(t)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(t-t_*)^p}{p!}\frac{\partial x^p(t_*)}{\partial t^p}. \qquad (7)$$

Залежність (6) є одновимірним рядом Тейлора за аргументом t, який з врахуванням (7) запишемо

$$f(x(t))=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(t-t_*)^p}{p!}\frac{\partial x^p(t_*)}{\partial t^p}-x_*\right)^n}{n!}\frac{\partial^n f(x_*)}{\partial x^n}=$$

$$=f(x_*)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(t-t_*)^p}{p!}\frac{\partial x^p(t_*)}{\partial t^p}\right)^n}{n!}\frac{\partial^n f(x_*)}{\partial x^n}. \qquad (8)$$

Отримання Т-спектру (8) полягає у застосуванні до (8) операції прямого ДТ-перетворення (1), як і було проведено у [1] та отримано (3). Однак, можливо і не робити цього безпосередньо, а переписати функцію (8) у вигляді ряду Тейлора за t, тобто перегрупувати (8) у єдиний ряд. Проведемо таку операцію. Для зменшення громіздкості викладок, але без втрати їх узагальненості, з врахуванням властивостей ДТ-перетворень перепишемо (8) в позначеннях для Т-спектрів (1) та (2):

$$f(t)\overset{DTP}{\Leftrightarrow}F(k), \quad x(t)\overset{DTP}{\Leftrightarrow}X(k),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}F(k)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\sum_{p=1}^{\infty}X(p)\right)^n\frac{1}{n!}\frac{\partial^n f(x_*)}{\partial x^n}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sum_{k=0}^{\infty}F(k)=f(x_*)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\sum_{p=1}^{\infty}X(p)\right)^n\frac{1}{n!}\frac{\partial^n f(x_*)}{\partial x^n}\right], \qquad (9)$$

де $\overset{DTP}{\Leftrightarrow}$ - позначає операцію ДТ-перетворення.

Розпишемо (9) виходячи із правила: якщо поліноми рівні, тоді і коефіцієнти при відповідних степенях аргументів рівні. Зазначене проілюстровано на рис. 1, де шуканий Т-спектр $F(k)$ розкритий за рядками.

При отриманні даних для рис. 1 використано мультиноміальну теорему (поліном Ньютона) [6]:

$$\left(\sum_{p=1}^{m}a_p\right)^n=\sum_{\sum_{p=1}^{m}s_p=n,\,s_p\ge 0}\left[\binom{n}{s_1,s_2,\cdots,s_m}\prod_{p=1}^{m}a_p^{s_p}\right], \qquad (10)$$

де $\binom{n}{s_1,s_2,\cdots s_m}=\left(\frac{n!}{s_1!s_2!\cdots s_m!}\right)$ - мультиноміальні коефіцієнти.

Мультиноміальні коефіцієнти визначаються для всіх цілих невід'ємних чисел n та $s_1,s_2,\cdots s_m$ таких, що $s_1+s_2+\cdots+s_m=n$.

Застосування (10) до відрізку внутрішньої суми правої частини (9), дає співвідношення:

$$\left(\sum_{p=1}^{p_{\max}}X(p)\right)^n=\sum_{\sum_{p=1}^{p_{\max}}s_p=n,\,s_p\ge 0}\left[\binom{n}{s_1\cdots s_p}\prod_{p=1}^{p_{\max}}X(p)^{s_p}\right]. \qquad (11)$$

На рис. 1 – перший стовпчик розкриває праву частину (9) для $k\ge 1$, решта таблиці розкриває ліву частину (9), у якій рядки розкривають суму за n, а стовпці суму за p відповідно формули (11).

$$\underbrace{\sum_{\sum_{p=1}^{p_{\max}}s_p=n,\,s_p\ge 0}\left[\binom{n}{s_1\cdots s_p}\prod_{p=1}^{p_{\max}}X(p)^{s_p}\right]\frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial x^n}}$$

$$\Downarrow$$

k/n	$\times\frac{\partial f}{\partial x}$	$\times\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$\times\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$	$\times\frac{1}{4!}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$	$\times\frac{1}{5!}\frac{\partial^5 f}{\partial x^5}$	$\frac{1}{6!}\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}$
$F(1)=$	$X(1)$	0	0	0	0	0
$F(2)=$	$X(2)$	$X(1)^2$	0	0	0	0
$F(3)=$	$X(3)$	$2X(1)X(2)$	$X(1)^3$	0	0	0
$F(4)=$	$X(4)$	$X(2)^2+2X(1)X(3)$	$3X(1)^2X(2)$	$X(1)^4$	0	0
$F(5)=$	$X(5)$	$2X(2)X(3)+2X(1)X(4)$	$3X(1)^2X(3)+3X(1)X(2)^2$	$4X(1)^3X(2)$	$X(1)^5$	0
$F(6)=$	$X(6)$	$X(3)^2+2X(2)X(4)+2X(1)X(5)$	$X(2)^3+6X(1)X(2)X(3)+6X(1)^2X(4)$	$6X(1)^2X(2)^2+4X(1)^3X(3)$	$5X(1)^4X(2)$	$X(1)^6$
$F(k)$	$X(k)$	$X_{-0}^{\underline{2}}(k)=\sum_{p=1}^{k-1}X(k-p)X(p)$	$X_{-0}^{\underline{3}}(k)=\sum_{p=1}^{k-1}X_{-0}^{\underline{2}}(k-p)X(p)$ $\cdots$	$X_{-0}^{\underline{d}}(k)=\sum_{p=1}^{k-1}X_{-0}^{\underline{d-1}}(k-p)X(p)$	$\ldots$	$X_{-0}^{\underline{k}}(k)=X(1)^6$

$$\Downarrow$$

$$F(k\ge 1)=X(k)\frac{\partial f}{\partial x}+\cdots+X_{-0}^{\underline{d}}(k)\frac{1}{d!}\frac{\partial^d f}{\partial x^d}+\cdots+X(1)^6\frac{1}{k!}\frac{\partial^k f}{\partial x^k}, \text{ де } X_{-0}^{\underline{d}}(k)=\sum_{p=1}^{k-1}X_{-0}^{\underline{d-1}}(k-p)X(p),$$

або

$$F(k\ge 1)=X(k)\frac{\partial f}{\partial x}+\cdots+\sum_{\sum_{p=1}^{k}ps_p=k,\,\sum_{p=1}^{k}s_p=d,\,s_p\ge 0}\left[\binom{d}{s_1\cdots s_d}\prod_{p=1}^{k}X(p)^{s_p}\right]\frac{1}{d!}\frac{\partial^d f}{\partial x^d}+\ldots+X(1)^k\frac{1}{k!}\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$$

Рисунок 1. Порядок визначення Т-спектру складної функції, що задана у вигляді суперпозиції функцій

З аналізу (рис. 1) видно, що:

для конкретного k (за рядками), по-перше, спектр $F(k)$ є скінченна сумою з k елементів (стовпців) та, по-друге, для визначення $F(k)$ використовується тільки Т-спектр $X(p)$ при $1 \le p \le k$, тобто в (11) достатньо взяти

$$\begin{cases} p_{\max} = n \\ n = k \end{cases} \Rightarrow p_{\max} = k \tag{12}$$

для конкретного елементу таблиці за рядком, в позначеннях (11) та з врахуванням (12) виконується умова, яка визначає рівність степенів аргументів в поліномах з правої та лівої частин

$$\sum_{p=1}^{k} ps_p = k \tag{13}$$

На рис. 1 для визначення Т-спектру відповідної степені функції $X_{-0}^{d}(k)$ використовується змінена класична алгебраїчна згортка [1], за рахунок відкидання (неврахування) Т-дискрети $X(0)$.

З врахуванням (9) та (11)-(13) отримаємо Т-спектр $F(k)$ у вигляді

$$F(k) = \begin{cases} f(x_*), \qquad \{k=0\}, \\ X(k)\dfrac{\partial f(x_*)}{\partial x} + \sum\limits_{d=2}^{k}\left(X_{-0}^{d}(k)\dfrac{1}{d!}\dfrac{\partial^d f(x_*)}{\partial x^d}\right), \{k \ge 1\}, \end{cases} \tag{14}$$

$$\text{при } X_{-0}^{2}(k) = \sum_{p=1}^{k-1} X(k-p)X(p) \text{ та } X_{-0}^{d}(k) = \sum_{p=1}^{k-1} X_{-0}^{d-1}(k-p)X(p), \tag{15}$$

або у розгорнутому вигляді

$$F(k) = \begin{cases} f(x_*), \qquad \{k=0\}, \\ \sum\limits_{d=1}^{k}\left[\left(\sum\limits_{\sum_{p=1}^{k} ps_p = k,\ \sum_{p=1}^{k} s_p = d,\ s_p \ge 0} \left[\binom{d}{s_1 \cdots s_d}\prod_{p=1}^{k} X(p)^{s_p}\right]\right)\dfrac{1}{d!}\dfrac{\partial^d f(x_*)}{\partial x^d}\right], \quad \{k \ge 1\}. \end{cases} \tag{16}$$

Залежності (14) та (15) тотожні, для наочності розкриємо в них перші три та останній члени суми

$$F(k \ge 1) = X(k)\frac{\partial f(x_*)}{\partial x} + \sum_{p=1}^{k-1}\big(X(k-p)X(p)\big)\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f(x_*)}{\partial x^2} + \sum_{p=1}^{k-1}\left(X(k-p)\sum_{s=1}^{p-1}\big(X(p-s)X(s)\big)\right)\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f(x_*)}{\partial x^3} +$$

$$+ \sum_{d=3}^{k-1}\left(X_{-0}^{d}(k)\frac{1}{d!}\frac{\partial^d f(x_*)}{\partial x^d}\right) + X(1)^k\frac{1}{k!}\frac{\partial^k f(x_*)}{\partial x^k}. \tag{17}$$

Із залежностей (14), (15) та (16) можна побачити, що шуканий Т-спектр складної функції отримано у вигляді скінченного ряду, що позбавлено недоліку вихідного подання (3), хоча і вигляд (14), (15) та (3) є у значному ступені подібними, у тому числі через те, що (15) та (4) є тотожними. Однак, в класичній роботі з ДТ-перетворень, виходячи з властивостей ДТ-спектрів отримано все ж такі іншу залежність.

З отриманої залежності (14) можна дослідити вплив врахованої кількості ДТ-дискрет $X(k)$ на точність визначення $F(k)$. А саме, якщо для розрахунку $F(k)$ при $k = 0,...,k_{\max}$, використовується "штучно зменшений" Т-спектр $X(k)$ при $k = 0,...,\widetilde{k}_{\max}$ та $k_{\max} > \widetilde{k}_{\max}$, тобто якщо $X(k > \widetilde{k}_{\max}) = 0$. Описана процедура, може бути обчислювально ефективною для зменшення результуючої обчислювальної складності числового алгоритму рішення інтегро-диференціальної задачі методом ДТ-перетворень, або для випадку коли кількість відомих Т-дискрет для $X(k)$ менша за їх необхідну кількість для визначення ДТ-спектру $F(k)$.

Висновки й перспективи подальших досліджень

Таким чином, у статті отримано нові залежності для визначення диференціально-тейлорівського спектру складної функції, яка задана у вигляді суперпозиції функцій. Зазначене є удосконаленням теоретичних основ математичного апарату диференціально-тейлорівських перетворень.

Перспективами подальших досліджень може бути застосування отриманих залежностей для оцінки залежності точності рішення задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь методом диференціально-тейлорівських перетворень [5, 7, 8].

Література

1. Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования функций и уравнений / Г. Е. Пухов // Киев: Наукова думка, 1980. – 420 с. **2. Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов / Г.Е. Пухов // К.: Наукова думка, 1986. – 159 с. **3. Пухов Г.Е.** Дифференциальные спектры и модели / Г.Е. Пухов // К.: Наукова думка, 1990. – 184 с. **4. Zhou J.K.** Differential Transformation and its application for electrical circuits / J.K. Zhou // Huazhong University Press, Wuhan, China, 1986 (in Chinese). **5. Ракушев М.Ю.**

Прогнозування руху космічних апаратів на основі диференціально-тейлорівських перетворень. Монографія / М.Ю. Ракушев // Житомир: Видавець О.О. Євенок, 2015. ISBN 978-617-7265-43-5. **6. Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике: Пер. с англ./ Под ред. И.Г. Арамановича. – М.: Наука, 1974. – 832 с. **7. Rakushev M.Yu.** Computational scheme of ordinary differential equations integration on the basis of differential taylor transformation with automatic step and order selection / M.Yu. Rakushev // Journal of Automation and Information Sciences. – Begell House Inc. – Vol. 44, Issue 12, 2012. Pages 12-22. DOI**:** 10.1615/JAutomatInfScien.v44.i12.20.
8. Ракушев М.Ю. Схема інтегрування рівняння руху космічного апарата на основі диференціально-тейлорівського перетворення зі зменшеними обчислювальними витратами / М. Ю. Ракушев // Науково-практичний журнал "Космічна наука і технологія", – Київ, 2010 р. Т. 16. № 6. С. 51-56.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ТЕЙЛОРОВСКОГО СПЕКТРА СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ ВАРИАНТА СУПЕРПОЗИЦИИ ПРИ АНАЛИЗЕ ТОЧНОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Михаил Юрьевич Ракушев ***(доктор технических наук, с.н.с.)***
Николай Васильевич Филатов ***(кандидат технических наук, доцент)***

Национальный университет обороны Украины имени Ивана Черняховского, Киев

В статье получены зависимости для определения дифференциально-тейлоровского спектра сложной функции, заданной в виде суперпозиции функций. А именно, для случая когда исходная функция задается рядом Тейлора по степени некоторой переменной – первого аргумента, а конечная функция задается рядом Тейлора по степени исходной функции. Далее решается задача определения дифференциально-тейлоровского спектра – коэффициентов ряда Тейлора конечной функции по степеням первого аргумента. В классической литературе по дифференциально-тейлоровским преобразованиям, указанный дифференциально-тейлоровский спектр (отдельные члены ряда Тейлора), подается в виде бесконечной суммы по степеням первого аргумента. В статье получены зависимости, которые дифференциально-тейлоровский спектр суперпозиции функций определяют как конечную сумму по степеням первого аргумента. При этом приведены зависимости в двух различных формах, что позволяет выбирать более удобную для конкретного практического использования форму. Особенностью полученных формул является использование сокращенной алгебраической свертки при расчете дифференциально-тейлоровского спектра степенной функции для первого аргумента – в свертке не учитывается нулевая дискрета дифференциально-тейлоровского спектра исходной функции по первому аргументу. Полученные соотношения являются существенными для задач анализа зависимости точности представления конечной функции от заданного количества учтенных дискрет дифференциально-тейлоровского спектра исходной функции, а также решения задачи оценки зависимости точности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методом дифференциально-тейлоровских преобразований при изменении количества учтенных дискрет дифференциально-тейлоровского спектра, что принимают участие в расчетах. Полученные зависимости являются дальнейшим развитием теоретических основ отечественного математического аппарата дифференциально-тейлоровских преобразований Пухова.

Ключевые слова: *дифференциально-тейлоровские преобразования; дифференциально-тейлоровский спектр; суперпозиция функций.*

DETERMINATION OF THE DIFFERENTIAL-TAYLOR SPECTRUM OF A COMPLEX FUNCTION FOR A VARIANT OF SUPERPOSITION IN ANALYSIS OF THE ACCURACY OF DYNAMIC SYSTEMS

Mikhailo Rakushev ***(Doctor of Technical Sciences, Senior Researcher)***
Mykola Filatov ***(Candidate of Technical Sciences, Associate Professor)***

National Defence University of Ukraine named after Ivan Cherniakhovskyi, Kyiv, Ukraine

In the article, dependences are obtained for determining the differential-Taylor spectrum of a complex function, given in the form of a superposition of functions. Namely, for the case when the original function is given by the Taylor series in the degree of some variable - the first argument, and the final function is given by the Taylor series in the degree of the original function. Next, we solve the problem of determining the differential Taylor spectrum - the coefficients of the Taylor series of a finite function in powers of the first argument. In the classical literature on differential-Taylor transformations, the specified differential-Taylor spectrum (individual terms of the Taylor series) is presented as an infinite sum in powers of the first argument. In the article, dependences are obtained that define the differential-Taylor spectrum of a superposition of functions as a finite sum in powers of the first argument. At the same time, dependences are given in two different forms, which *makes it possible to choose a form that is more convenient for specific practical use. A feature of the obtained formulas is the use of reduced algebraic convolution when calculating the differential-Taylor spectrum of the power function for the first argument - the convolution does not take into account the zero discrete of the differential-Taylor spectrum of the original function with respect to the first argument. At the same time, dependences are given in two different forms, which makes it possible to choose a form that is more convenient for specific practical use. A feature of the obtained formulas is the use of reduced algebraic convolution when calculating the differential-Taylor spectrum of the power function for the first argument - the convolution does not take into account the zero discrete of the differential-Taylor spectrum of the original function with respect to the first argument. The obtained relations are essential for the problems of analyzing the dependence of the accuracy of the representation of a finite function on a given number of taken into account discrete differential-Taylor spectrum of the original function, as well as solving the problem of estimating the dependence of the accuracy of the solution of the Cauchy problem for ordinary differential equations by the method of differential-Taylor transformations when the number of taken into account discrete Taylor spectrum that take part in the calculations. The obtained dependences are a further development of the theoretical foundations of the domestic mathematical apparatus of Pukhov's differential-Taylor transformations.*

Keywords: *differential-Taylor transformations; differential Taylor spectrum; superposition of functions.*

References

1. Puhov G.E. Differentsialnyie preobrazovaniya funktsiy i uravneniy / G. E. Puhov // Kiev: Naukova dumka, 1980. – 420 s. **2. Puhov G.E.** Differentsialnyie preobrazovaniya i matematicheskoe modelirovanie fizicheskih protsessov / G.E. Puhov // K.: Naukova dumka, 1986. – 159 s. **3. Puhov G.E.** Differentsialnyie spektryi i modeli / G.E. Puhov // K.: Naukova dumka, 1990. – 184 s. **4. Zhou J.K.** Differential Transformation and its application for electrical circuits / J.K. Zhou // Huazhong University Press, Wuhan, China, 1986 (in Chinese). **5. Rakushev M.Yu.** Prognozuvannya ruhu kosmIchnih aparatIv na osnovI diferentsIalno-teylorIvskih peretvoren. MonografIya / M.Yu. Rakushev // Zhitomir: Vidavets O.O. Evenok, 2015. ISBN 978-617-7265-43-5. **6. Korn G.,** Korn T. Spravochnik po matematike: Per. s angl./ Pod red. I.G. Aramanovicha. – M.: Nauka, 1974. – 832 s. **7. Rakushev M.Yu.** Computational scheme of ordinary differential equations integration on the basis of differential taylor transformation with automatic step and order selection / M.Yu. Rakushev // Journal of Automation and Information Sciences. – Begell House Inc. – Vol. 44, Issue 12, 2012. Pages 12-22. DOI**:** 10.1615/JAutomatInfScien.v44.i12.20.

8. Rakushev M.Yu. Shema Integruvannya rIvnyannya ruhu kosmIchnogo aparata na osnovI diferentsIalno-teylorIvskogo peretvorennya zI zmenshenimi obchislyuvalnimi vitratami / M. Yu. Rakushev // Naukovo-praktichniy zhurnal “KosmIchna nauka I tehnologIya”, – KiYiv, 2010 r. T. 16. № 6. S. 51-56.