DOI:**10.33099/2311-7249/2020-37-1-27-30**

УДК 519.711

Олександр Олександрович Машкін *(кандидат технічних наук, старший науковий співробітник)*

Центральний науково-дослідний інститут Збройних Сил України, Київ, Україна

ЕЛЕМЕНТИ ІМІТАЦІЇ У РІВНЯННЯХ МОДЕЛЕЙ ЛАНЧЕСТЕРСЬКОГО ТИПУ

У статті приведений короткий огляд можливої сфери застосування модифікацій моделей ланчестерського типу, а також розглянуті деякі особливості використання елементів імітації та чисельного вирішення диференційних рівнянь таких моделей у стохастичній постановці. Стохастична постановка дозволяє певним чином імітувати вплив випадкових факторів таураховувати елементи невизначеності, які впливатимуть на динаміку змін чисельності протиборчих угруповань, і які у тій чи іншій мірі присутні у будь-яких бойових діях. На відміну від детермінованих моделей, стохастичні моделі потребують використання спеціальних чисельних методів, вибір конкретного з яких може ґрунтуватися на вимогах до ступеню їх збіжності на інтервалі інтегрування. Оцінка збіжності може слугувати також для перевірки правильності програмної реалізації обраного методу.

Ключові слова: *імітація у ланчестерських моделях; стохастичні диференційні рівняння; методи чисельного вирішення; збіжність методу.*

Вступ

Постановка проблеми. Інтерес до моделей ланчестерського типу, який простежується за регулярними публікаціями у тематичних періодичних виданнях, зокрема [1-5], свідчить про дієвість такого апарату для питань оперативного прогнозування змін у чисельності протиборчих угруповань в ході бойових дій. Так, у [1, 2] зазначено, що навіть у складі потужних комплексів математичних моделей операцій (бойових дій) є необхідними та практично завжди використовується так звані експрес-моделі. Основним призначенням таких моделей є проведення швидких оціночних розрахунків (без необхідності використання значного обсягу вихідних даних та обчислювального ресурсу) початкового співвідношення сил протиборчих сторін, а також прогнозування ймовірного ходу та результатів дій, що плануються. Є зрозумілим, що для таких задач використовується переважно арсенал аналітичного моделювання. Особливе місце у цьому класі займають моделі ланчестерського типу, до переваг яких можна віднести ясний фізичний зміст складових, які можуть входити у різні модифікації рівнянь (наслідком чого є можливість зрозумілим чином інтерпретувати отримані результати), оперативність отримання результатів та контрольованість проведення розрахунків. Достатньо перспективним напрямками модифікації моделей зазначеного типу (для підвищення адекватності моделей шляхом наближення опису за їх допомогою реалій бойових дій), слід вважати використання елементів імітації для урахування невизначеностей різного характеру у динамічних коефіцієнтах бойової ефективності, інтенсивності поповнення (зменшення) чисельності угруповань, а також у вигляді стохастичних складових у диференційних рівняннях. Оскільки відомості щодо ймовірних намірів противника носитимуть, здебільшого, лише прогнозний характер, урахування динамічних коефіцієнтів у відповідних диференційних рівняннях можливе у вигляді розподілів величин, вигляд яких обиратиметься виходячи з наявних даних про противника або виходячи з інших, суто практичних міркувань. Є очевидним, що оперативність вирішення навіть лінійних диференційних рівнянь у складі ланчестерських моделей досягається лише при використанні чисельних методів, урахування динамічних коефіцієнтів переводить таки рівняння до розряду нелінійних, що робить використання чисельного інтегрування єдиним шляхом отримання результатів за такими моделями. Однак, імітація впливу різного роду випадкових чинників на хід бойових дій шляхом введення стохастичних складових у рівняння ланчестерських моделей обумовлює необхідність представлення їх у формі стохастичних диференційних рівнянь (СДР), для вирішення яких відомі та апробовані чисельні методи (типу методів Рунге-Кутти різних порядків точності, або модифікацій методу Ейлера) неефективні. Методи вирішення СДР та їх систем відрізняються від згаданих методів чисельного інтегрування, вони мають ряд особливостей, урахування яких для отримання прийнятних результатів за моделями ланчестерського типу у стохастичній постановці представляється достатньо актуальним науково-практичним завданням.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Незважаючи на те, що хрестоматійний вигляд рівнянь був запропонований (незалежно один від одного) Осіповим та Ланчестером ще на початку 20-го сторіччя, такі моделі знаходять подальший теоретичний розвиток і сьогодні, що відзначається, зокрема, у [3]. Дослідження у сфері складних військових систем, результати яких узагальнюються у приведених джерелах, показують, що модифікації ланчестерських моделей представляються достатньо ефективним інструментом їх якісного аналізу та виявлення нових закономірностей їх розвитку при урахуванні нелінійних співвідношень між параметрами систем. Проте, хоча у роботі [1] деталізовані способи імітації випадкових процесів у диференційних рівняннях, а у [3] відзначена перспективність такого напрямку розвитку ланчестерських моделей, як перевід їх у вигляд СДР, розгляд питань вирішення СДР та їх систем залишений поза увагою. Такі питання набувають ще більшої актуальності зважаючи на те, що, на відміну від відомих методів чисельного інтегрування, методи вирішення СДР у більшості середовищ моделювання не реалізовані, тобто вони потребуватимуть програмної реалізації з одночасною перевіркою отриманих характеристик відповідним теоретичним положенням. Зважаючи на викладене, **метою статті** є розгляд доцільності введення елементів імітації у рівняння ланчестерських моделей для урахування впливу випадкових факторів на динаміку змін чисельності сторін в ході бойових дій.

Виклад основного матеріалу дослідження

Детальний аналіз та класифікація моделей ланчестерського типу приведений у [4]. Розглянувши та проаналізувавши більшість існуючих класичних постановок, автор [4] приходить до справедливого висновку, що такі моделі можна вважати певною мірою “ідеальними”, пристосованими для ідеальних умов. Реальні конфлікти відрізнятимуться, насамперед, за часом, тривалість їх буде визначатися надходженням різного роду ресурсів (людських, матеріальних) та впливом інших, зокрема й випадкових чинників. Тому, фактично, у рівняннях повинен знаходитися член, впливом на який можна “регулювати” тривалість збройного конфлікту та перевагу тієї чи іншої сторони. Таке твердження знайшло відображення у наступному узагальненому запису системи рівнянь у так званій “м’якій”, нелінійній постановці:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -c(x,y)y(t) - d(t) \\ \frac{dy}{dt} &= -g(x,y)x(t) - h(t) \end{aligned}, \qquad (1)$$

де x, y – чисельності протиборчих угруповань;

c, g – змінні коефіцієнти, що відображають інтенсивності втрат від впливу противника;

d, h – вільні члени рівнянь, які відображають надходження різного роду резервів та вплив інших чинників.

Необхідно відзначити, що вільні члени рівнянь вигляду (1) d(t) та h(t) можуть відігравати роль не тільки відображення надходження (збитку) різного роду ресурсів, а і взагалі впливу зовнішнього середовища, що часто використовується у моделях популяційної динаміки. У стохастичній постановці вільні члени рівнянь ланчестерського типу, що використовуватимуться в якості експрес-моделей прогнозування ходу бойових дій, також можуть відображати важкопрогнозовані випадкові чинники, які природнім чином присутні протягом їх ведення. Як відомо [6], у загальному випадку під стохастичним диференційним рівнянням розуміється диференційне рівняння, у якому один член або більше відображають стохастичний процес. Найбільш відомий та достатньо поширений у практиці приклад СДР – це рівняння з членом, що описує так званий вінерівський випадковий процес (форма Ланжевена у інтерпретації Іто або Стратоновича):

$$dx = a(x)dt + b(x)dW\,. \qquad (2)$$

Як видно з форми рівняння (2), воно складається зі звичайного (не стохастичного) диференційного рівняння та додаткової частини, що описує вінерівський шум (dW) [6].

Зазвичай вінерівський шум реалізується як $dW = \varepsilon\sqrt{dt}$, де $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ та $\varepsilon_i \sim N(0,1)$ – нормальний розподіл з нульовим середнім та одиничною дисперсією. Хоча, взагалі, у якості випадкового процесу можна використовувати будь-який напівмартингал, практичне застосування знайшли саме вінерівський та пуасонівський процеси.

Приведення рівнянь моделей ланчестерського типу (з метою імітації впливу випадкових факторів) до стохастичної форми у приведеній вище постановці не викликає труднощів, параметри розподілів випадкових процесів (нормального або пуасонівського) при цьому обираються, як зазначалося, виходячи з наявних даних про умови ведення бойових дій. Але методи їх чисельного вирішення будуть відрізнятися від загальновідомих методів чисельного інтегрування, при цьому необхідно зазначити, що вони (у своїй більшості) є своєрідними стохастичними аналогами розкладання у ряд Тейлора. Серед таких методів порівняною простотою для програмної реалізації та необхідних подальших перевірок відрізняються наступні: метод Ейлера-Мураями, методи Мільштейна та Тейлора. Їх відмінність полягає, насамперед, у збіжності, поняття якої полягає у наступному. Припустимо, що X(t) – рішення СДР на ділянці [0;T], така ділянка розбита рівними кроками розмірності h. Нехай Y(t)– деяка дискретна апроксимація X(t), що розрахована за допомогою модифікованого чисельного методу у певних точках розбиття ділянки [0;T]. У такому випадку вважається, що чисельний метод сильно сходиться до X(t) у момент часу T, якщо $\lim_{h\to 0} E\{|X(t) - Y(t)|\} = 0$, де E – математичне очікування. Вважається також, що чисельний метод збігається сильно до X(t) у момент часу T з порядком γ>0, якщо існує деяка константа C>0, що не залежить від h, а також число δ>0 таке, що $\lim_{h\to 0} E\{|X(t) - Y(t)|\} \le Ch^{\gamma}$, для усіх h є (0; δ). Змістовно, поняття сильної збіжності означає, що при усіх достатньо малих значеннях кроку інтегрування h середнє значення похибки у кінцевій точці t=T буде обмежуватись величиною кроку у ступеню γ, множеної на деяку константу, яка не залежить від h. Чим більше значення γ, тим скоріше збігається метод при зменшенні кроку h. Так, якщо метод матиме порядок збіжності 1, це означатиме, що при зменшенні кроку інтегрування вдвічі слід очікувати не менше ніж двократного зменшення похибки у точці t =T. Необхідно також відзначити, що у теорії СДР існує також поняття слабкої збіжності, яке у даному випадку не розглядається. Перелічені вище методи мають наступні порядки збіжності: метод Ейлера-Мураями – 1/2; метод Мільштейна – 1; метод Тейлора – 1,5.

Для наочності та в якості прикладу припустимо, що для програмної реалізації обраний метод Мільштейна, для перевірки правильності його реалізації можна використати тестове модельне рівняння вигляду:

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t),\ S_0 > 0 \qquad (3)$$

з аналітичним рішенням виду:

$$S_t = S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W_t}, \qquad (4)$$

де *r*, *σ* – постійні коефіцієнти, що ураховують випадковий характер функції виду S_t.

Тоді чисельний метод Мільштейна для вирішення СДР можна записати у вигляді:

$$S_{i+1} = S_i + S_i(rh + \sigma\Delta W_i) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_i\left((\Delta W_i)^2 - h\right), \quad S_0 = s_0 \qquad (5)$$

де $\Delta W_i = N(0,1)\ h^{1/2}$ – приріст випадкового вінерівського процесу.

Наявність точного аналітичного рішення X(t) за (4) тестового рівняння виду (3) дає змогу перевірити програмну реалізацію обраного методу чисельного інтегрування СДР. Практична організація перевірки реалізації методу Мільштейна полягає у отриманні оцінки (ε) математичного очікування $E\{\,|X(t) - Y(t)|\,\}$ як:

$$\varepsilon = \frac{1}{nPaths}\sum_{k=1}^{nPaths}\left\{\left|X^k(T) - Y^k(T)\right|\right\} \qquad (6)$$

де nPaths – кількість траєкторій, отриманих для точного $X^k(t)$ та приблизного чисельного $Y^k(t)$ рішення відповідно (зазвичай, величина nPaths обирається достатньо великою, не меншою за 100 траєкторій).

Після упевнення у правильності реалізації обраного методу вирішення СДР та його відповідності теоретичним характеристикам збіжності, отриману реалізацію можна використати для вирішення, наприклад, такого вигляду ланчестерської моделі з урахуванням поповнення чисельності сторін в ході бойових дій:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\lambda_2 y + \mu_1(N_1 - x),\ x(0) = N_1 \\ \frac{dy}{dt} &= -\lambda_1 x + \mu_2(N_2 - y),\ y(0) = N_2 \end{aligned}, \qquad (7)$$

де $N_{1,2}$ – початкові чисельності протиборчих угруповань;

$\lambda_{1,2}$ – інтенсивності вражаючої дії бойових одиниць сторін;

$\mu_{1,2}$ – інтенсивності відновлення чисельності угруповань.

При цьому доцільно спочатку привести вигляд динаміки системи (7), що вирішується як детермінована методом Рунге-Кутти 4 порядку точності. Припустимо також, що параметр μ_1 змінюється ступінчастим чином на протязі 2,5 одиниць часу (імітується введення в бій резервів у визначені моменти часу, рис. 1), сторона *y* свою чисельність протягом бою не поповнює ($\mu_2 = 0$). Відносно довільно взятих початкових умов, за яких сторона *y* втричі перевищує сторону *x* за початковою чисельністю, значення параметрів та динаміка системи (7) за детермінованою моделлю графічно відображається так, як показано на рис. 2.

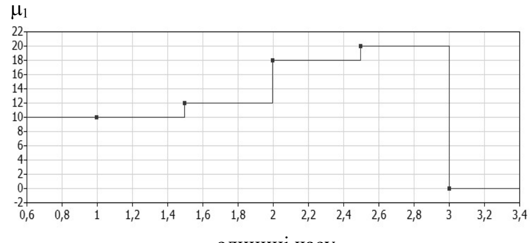

Рис. 1. Характер змін параметру μ_1

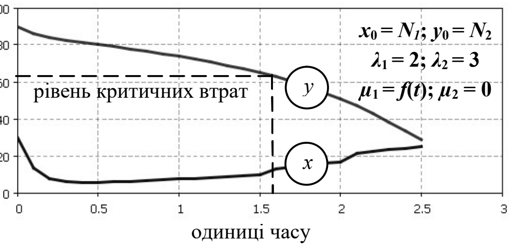

Рис. 2. Динаміка змін чисельності сторін, розрахована за детермінованою моделлю

На рис. 3 показана аналогічна динаміка змін чисельності сторін, але розрахована вже за стохастичною моделлю (для ідентичних умов).

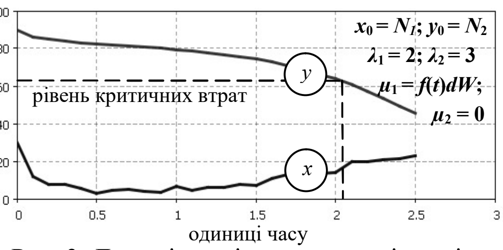

Рис. 3. Динаміка змін чисельності сторін, розрахована за стохастичною моделлю

Як видно з рис. 2 та 3, негативний вплив випадкових чинників може суттєво відзначитися на динаміці змін чисельності сторін в ході бойових дій. Припускаючи (для прикладу) що мова йде про моделювання дій тактичного рівня на протязі 2,5 годин бою (сторона *y*, маючи трикратну перевагу, наступає, сторона *x* обороняється; N_1=30, N_2=90), а також вважаючи, що критичними для противника втратами, після яких він відмовляється від продовження дій, є втрати 30 % початкової чисельності, можна відзначити наступне. При використанні детермінованої ланчестерської моделі за заданих умов вважатиметься, що противник відмовиться від продовження дій після приблизно 1,5 годин бою. При використанні стохастичної моделі, що імітує вплив важкоформалізуємих чинників (якими можуть бути умови місцевості, пора року або погодні умови, морально-психологічний стан військ тощо), інтенсивність надходження резервів до сторони *x* відрізнятиметься від такої ж інтенсивності у детермінованій (дещо ідеалізованій) моделі. Це відповідним чином відображається на втратах сторони *y* та, як наслідок, критичній рівень втрат цією стороною досягатиметься лише після 2 годин бою. Тобто, при коректному описі зазначених вище чинників для імітації їх впливу стохастичний вигляд рівнянь ланчестерських моделей можна вважати більш наближеним до реалій бойових дій. Інакше кажучи, представлення рівнянь ланчестерських моделей у стохастичній формі та урахування всіх особливостей їх чисельного вирішення має на меті розширення можливостей моделей зазначеного типу щодо опису бойових дій, та, у кінцевому випадку, підвищення їх адекватності.

Висновки й перспективи подальших досліджень

Моделі ланчестерського типу та їх численні модифікації залишаються достатньо ефективним інструментом якісного аналізу та виявлення нових закономірностей динамічних військових систем при урахуванні нелінійних співвідношень між їх параметрами. Одним з напрямків розвитку моделей зазначеного типу є урахування (імітація) впливу важкопрогнозованих випадкових факторів на динаміку змін чисельності протиборчих сторін. Це дозволить наблизити такі моделі до реалій бойових дій та сприятиме підвищенню їх адекватності, але потребуватиме приведення диференційних рівнянь моделей до стохастичного виду. Такий вид рівнянь визначає необхідність залучення для їх вирішення спеціальних чисельних методів, кожен з яких відрізняється за своїми характеристиками, насамперед – за збіжністю результатів чисельного інтегрування.

Важливим питанням при використанні рівнянь ланчестерського типу з імітацією впливу випадкових факторів на динаміку бойових дій залишається питання обґрунтованого вибору виду та параметрів розподілу випадкових величин, суттєвих для урахування в моделі. Таке питання потребуватиме детальнішого розгляду і складає перспективу подальших досліджень у окресленому в статті напрямку.

Література

1. **Горевич Б.Н.** Применение элементов имитации в дифференциальных моделях военных действий / Б.Н. Горевич // Вооружение и экономика. – М., 2010. – № 2(10). – С. 31-41. 2. **Буравлев А.И.** Дифференциальное уравнение для количественного соотношения численностей противоборствующих сторон / А.И. Буравлев // Вооружение и экономика. – М., 2009. – № 4(8). – С. 4-8. 3. **Новиков Д.А.** Иерархические модели военных действий / Д.А. Новиков // Управление большими системами: сб. трудов. – М., 2012. – Вып. 37. – С. 25-62. 4. **Митюков Н.В.** К вопросу о типологии ланчестерских моделей / Н.В. Митюков // Круг идей: междисциплинарные подходы в исторической информатике. – М., 2008. – С. 375-399. 5. **Чуев В.Ю.** Модели двусторонних боевых действий многочисленных группировок / В.Ю. Чуев, И.В. Дубограй // Математическое моделирование и численные методы. 2016. № 9. С. 89-104. 6. **Кузнецов Д.Ф.** Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения / Д.Ф. Кузнецов. СПб, 2010.

ЭЛЕМЕНТЫ ИМИТАЦИИ В УРАВНЕНИЯХ МОДЕЛЕЙ ЛАНЧЕСТЕРСКОГО ТИПА

***Александр Александрович Машкин** (кандидат технических наук, старший научный сотрудник)*

Центральный научно-иследовательский институт Вооруженных Сил Украины, Киев, Украина

В статье приведен краткий обзор возможной сферы применения модификаций моделей ланчестерского типа, а также рассмотрены некоторые особенности использования элементов имитации и численного решения дифференциальных уравнений таких моделей в стохастической постановке. Интерес к моделям ланчеcского типа, который прослеживается по публикациям в тематических периодических изданиях, свидетельствует о действенности подобного аппарата для решения вопросов оперативного прогнозирования изменений в численности противостоящих группировок в ходе боевых действий. Стохастическая постановка позволяет определенным образом имитировать влияние случайных факторов и учитывать элементы неопределенности, которые оказывают влияние на динамику изменения численности противостоящих группировок, и которые в той или иной степени присутствуют в любых боевых действиях. В отличие от детерминированных моделей, стохастические модели требуют использования специальных численным методов, выбор конкретного из них может быть обоснован на требованиях к степени их сходимости на интервале интегрирования. Оценка сходимости может служить также для проверки правильности программной реализации выбранного метода. В статье рассмотрен сравнительный пример использования метода Мильштейна для численного решения дифференциальных уравнений ланчестерской модели в стохастической постановке.

***Ключевые слова:** имитация в ланчестерских моделях; стохастические дифференциальные уравнения; методы численного решения; сходимость метода.*

IMITATION ELEMENTS IN THE LANCHESTER MODEL EQUATIONS

***Olexander Mashkin** (Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher)*

Central Scientific Research Institute of the Armed Forces of Ukraine, Kyiv, Ukraine

The article gives a brief overview of the possible scope of application of modifications of the Lanchester type models, and also considers some features of the use of simulation elements and numerical solution of differential equations of such models in stochastic formulation. The interest to the models of the Lanchester type, which is traced by the publications in the thematic periodicals, testifies to the effectiveness of such apparatus for solving the problems of operational forecasting of changes in the number of opposing groups during the combat operations. Stochastic formulation allows to simulate in a certain way the influence of random factors and to take into account the elements of uncertainty that influence the dynamics of changes in the number of opposing factions, and which to some extent are present in any combat operations. In contrast to deterministic models, stochastic models require the use of special numerical methods, the choice of a particular model can be justified by the requirements for the degree of their convergence on the integration interval. Evaluation of the convergence can also serve to verify the correctness of the software implementation of the selected method. The article considers a comparative example of using the Milstein method for numerical solution of the Lanchester model differential equations in stochastic formulation.

***Keywords**: simulations in Lanchester models; stochastic differential equations; numerical solution methods; convergence of the method.*